

LES TECHNIQUES DE CALCUL

1. L'ordre alphabétique pour calculer les composantes de produits vectoriels (et en finir avec les déterminants funestes). Par exemple :  $(\vec{E} \wedge \vec{B})_y = E_z B_x - (z \leftrightarrow x)$ .

2. Le "truc" de Feynman (*Le cours de physique*, t. II, § 27-3) pour calculer le nabla d'un produit.

3. Les notations de la géométrie différentielle :

- Composantes d'un vecteur  $\vec{V}$  :  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , pour  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  respectivement.
- Dérivée "covariante" :  $\partial_i \stackrel{\text{df}}{=} \partial/\partial r_i$ , soit encore  $\partial_1 = \partial/\partial x$ ,  $\partial_2 = \partial/\partial y$  et  $\partial_3 = \partial/\partial z$ .
- La convention d'Einstein : un indice qui figure deux fois (et pas plus de deux) dans un monôme signifie une sommation sur les trois valeurs de cet indice. Exemple :  $\partial_i V_i \stackrel{\text{df}}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ .
- Le symbole de Kronecker : les neuf nombres  $\delta_{ij}$  bien connus. Par exemple, calculer :  $A_i B_j \delta_{ij}$ ,  $\delta_{ij} \delta_{jk}$ ,  $\delta_{ii}$ .
- Le symbole de Levi-Civita : les 27 nombres  $\varepsilon_{ijk}$  avec, par définition,  $\varepsilon_{ijk}$  antisymétrique par rapport à toute transposition de deux indices, et  $\varepsilon_{123} \stackrel{\text{df}}{=} 1$ . Vérifiez par exemple que  $(\vec{A} \wedge \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$ , que  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ , et calculez  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk}$ ,  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk}$ ,  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ .

EXERCICES

On a tout oublié, et on recommence...

**1. Champ scalaire et gradient**

Par exemple, un bulletin météo affecte à chaque point de l'espace, à un instant donné, une valeur de température  $T$ .

- Les points sont repérés par des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . On note alors  $T = f(x, y, z)$ . Exprimez la variation  $dT$  de la température entre deux points voisins. (A propos, voisin ça veut dire quoi ?)
- En déduire la définition d'un champ (vectoriel) qui associe à chaque point de l'espace un vecteur, noté  $\vec{\nabla}T$ , tel que l'on ait  $dT = \vec{\nabla}T \cdot d\vec{r}$ , où  $d\vec{r}$  est le déplacement d'un point à l'autre.
- Dans quelles directions de déplacement l'accroissement de la température est-il maximal, minimal, nul ?
- Les points de l'espace sont repérés par les coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$ . Le même champ scalaire (les mêmes températures) est alors représenté par  $T = g(\rho, \varphi, z)$ . Quelles sont les composantes du déplacement  $d\vec{r}$  dans la base locale de ces coordonnées ? En déduire les composantes du même champ vectoriel  $\vec{\nabla}T$  dans cette base.
- Mêmes questions avec les coordonnées sphériques  $(r, \vartheta, \varphi)$  et  $T = h(r, \vartheta, \varphi)$ .

**2. Formule de Stokes et rotationnel**

Soit le champ vectoriel qui à tout point de l'espace associe un vecteur  $\vec{V}$  (la vitesse du vent dans notre bulletin météo par exemple).

- Calculez la circulation de ce champ le long d'un petit (par rapport à quoi au fait ?) contour carré, centré en  $\vec{r}_0$ , de côté  $\varepsilon$ . (Pour cela, et sauf irrépressible désir de compliquer les choses, on a évidemment intérêt à choisir un repère dont les axes  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  sont parallèles aux côtés du carré.)
- En déduire la définition d'un champ vectoriel, noté  $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ , dont le flux permet de calculer la circulation de  $\vec{V}$  sur ce contour.
- Généraliser à un contour fermé quelconque (une formule de Stokes).
- A l'aide de cette formule de Stokes appliquée à de petits contours convenablement choisis, déterminez les expressions des composantes du champ  $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$  sur la base locale des coordonnées cylindriques.
- Même question pour les coordonnées sphériques.

### 3. Formule de Stokes et divergence

- Calculez le flux du champ  $\vec{V}$  à travers la surface d'un petit cube, centré en  $\vec{r}_0$ , de côté  $\varepsilon$ .
- En déduire la définition d'un champ scalaire, noté  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ , qui donne directement ce flux.
- Généraliser à une surface fermée quelconque (une autre formule de Stokes).
- A l'aide de cette formule de Stokes appliquée à une boîte convenablement choisie, déterminez l'expression du champ  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  en termes de composantes sur la base locale des coordonnées cylindriques.
- Même question pour les coordonnées sphériques.

### 4. De l'intérêt de la représentation complexe

Calculez  $\vec{\nabla} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ , et  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ , où  $\vec{k}$  et  $\vec{E}_0$  sont des vecteurs donnés. Comparez avec le calcul de  $\vec{\nabla} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ , et  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

### 5. Méthodes qualitatives

Estimez, d'abord sans calcul :

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ ,
- $\vec{\nabla} \cdot \hat{r}$ , où  $\hat{r}$  désigne le vecteur unitaire dans la direction du vecteur  $\vec{r}$ , soit  $\hat{r} \stackrel{\text{df}}{=} \vec{r}/|\vec{r}|$ ,
- $\vec{\nabla}(1/r)$ , où  $r \stackrel{\text{df}}{=} |\vec{r}|$ ,
- $\Delta r^n$ , où  $n$  est un entier pas forcément naturel,
- $\vec{\nabla} \wedge (\vec{a}/|\vec{r} - \vec{b}|)$ , où  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont deux vecteurs donnés,

puis calculez effectivement ces expressions.

### 6. Méthodes qualitatives

Estimez, d'abord sans calcul :

- $\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{r}/4\pi\varepsilon_0 r^3)$ , où  $\vec{p}$  est un vecteur donné,
- $\vec{\nabla} \wedge (\mu_0 \vec{m} \wedge \vec{r}/4\pi r^3)$ , où  $\vec{m}$  est un vecteur donné,

puis calculez effectivement ces expressions.

### 7. Identités remarquables

Calculez  $\vec{\nabla}(fg)$ ,  $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{V})$ ,  $\vec{\nabla} \wedge (f\vec{V})$ ,  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W})$ . (Un conseil : utilisez le "truc" de Feynman, puis essayez sans, juste pour voir !)

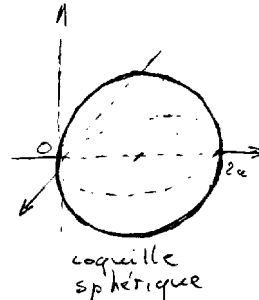
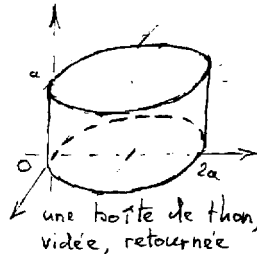
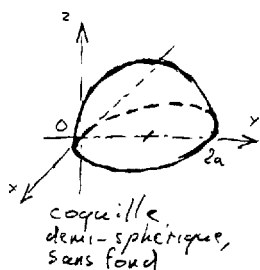
### 8. Encore des identités remarquables

Calculez  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$ ,  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f)$ ,  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})$ ,  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})$ . (Un conseil : utilisez l'artillerie des notations de la géométrie différentielle.)

### 9. Calculs de flux et de circulation

Soit le champ vectoriel  $\vec{V}(x, y, z) \stackrel{\text{df}}{=} \alpha y^2 \hat{x} + \beta z^2 \hat{y} + \gamma x^2 \hat{z}$ , où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des constantes. En ignorant la formule de Stokes...

- Calculez les composantes du champ  $\vec{W} \stackrel{\text{df}}{=} \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ .
- Calculez le flux de  $\vec{W}$  à travers (et dans le sens que vous voulez) la surface  $\mathcal{S}$ , portion du plan  $(\hat{x}, \hat{y})$  cloturée par le cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $a$ , centre  $(0, a, 0)$ .
- Calculez la circulation (dans le sens que vous voulez) de  $\vec{V}$  le long du contour  $\mathcal{C}$ .
- Et maintenant, vous vous remémorez la formule de Stokes. Quelles sont, à votre avis les valeurs du flux de  $\vec{W}$  à travers chacune des surfaces suivantes :



- Quelle est, toujours à votre avis, la valeur du flux de  $\vec{V}$  à travers la coquille sphérique ?
- Le champ  $\vec{V}$  peut-il être un champ magnétique ? Si oui, déterminez la densité de courant qui en est la source. Vous paraît-elle réalisable ?

1 Champs scalaire, gradient

laverne@paris7.jussieu.fr

•  $T = f(x, y, z)$

$dT = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

↑ scalaire      ↗ vecteur      ↘ vecteur

(par rapport aux rotations)

Voisin ?  
se dépend du champ  
 $|\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}| (dx)^2 \ll |\frac{\partial T}{\partial x} dx|$   
 $dx \ll |\frac{\partial T / \partial x}{\partial^2 T / \partial x^2}|$

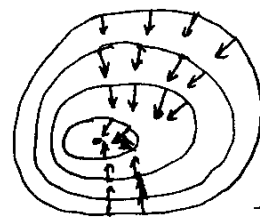
•  $dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{r}$  avec  $d\vec{r} = \begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}$   $\vec{\nabla} T \hat{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

↳ ce n'est pas un champ vectoriel,  
indépendant du repère,  
sert à évaluer les variations de T

- $\begin{cases} dT \text{ maxi} & \text{quand } d\vec{r} \propto \vec{\nabla} T \\ \text{--- mini} & \text{--- } d\vec{r} \propto -\vec{\nabla} T \\ \text{--- nul} & \text{--- } d\vec{r} \perp \vec{\nabla} T \end{cases}$

Exemple topographique:  
l'altitude  $A = f(x, y)$

$dA = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \cdot \begin{cases} dx \\ dy \end{cases}$



A  
 $\vec{\nabla} A$   
gradient  
(ligne de  
+ grde pente,  
ascendante)

•  $T = g(\rho, \varphi, z)$

$dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{r}$  ,  $d\vec{r} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}$

$\frac{\partial g}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial g}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial g}{\partial z} dz = (\vec{\nabla} T)_\rho d\rho + (\vec{\nabla} T)_\varphi \rho d\varphi + (\vec{\nabla} T)_z dz$

$\vec{\nabla} T = \frac{\partial g}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial g}{\partial z} \hat{z}$

•  $T = h(r, \theta, \varphi)$

$\frac{\partial h}{\partial r} dr + \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial h}{\partial \varphi} d\varphi = (\vec{\nabla} T)_r dr + (\vec{\nabla} T)_\theta r d\theta + (\vec{\nabla} T)_\varphi r \sin\theta d\varphi$

$\vec{\nabla} T = \frac{\partial h}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$

Abus de langage (motivé) chez les physiciens:

$T = T(x, y, z) = T(\rho, \varphi, z) = T(r, \theta, \varphi) = \dots$

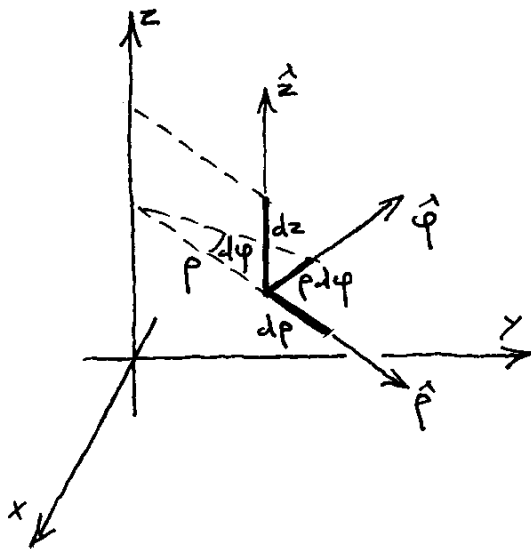
Comportement:

$\vec{\nabla} T = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} T$

vecteur      scalaire      /rotations

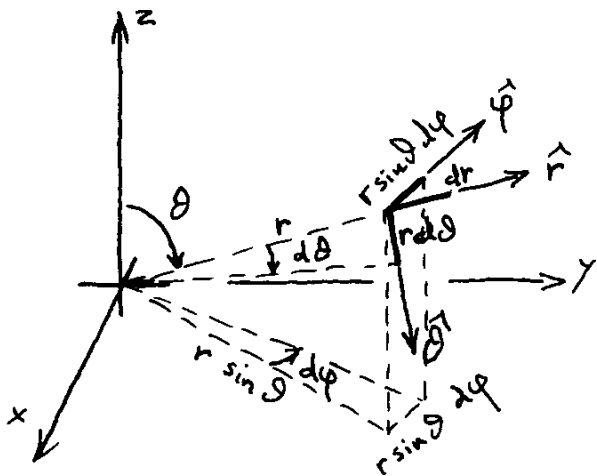
$\vec{\nabla} \hat{=} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$  opérateur vectoriel scalaire

Complément



Les composantes du déplacement infinitésimal sur la base locale (normée) des coordonnées cylindriques :

$$d\vec{r} = \begin{cases} dr\rho & \hat{\rho} \\ \rho d\varphi & \hat{\varphi} \\ dz & \hat{z} \end{cases}$$



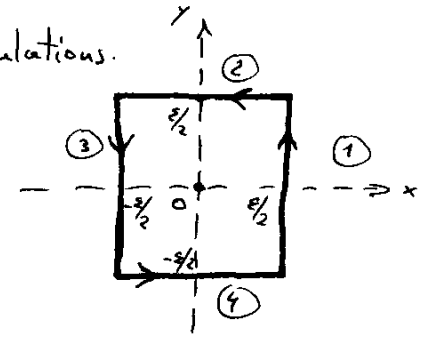
Sur la base locale des coordonnées sphériques :

$$d\vec{r} = \begin{cases} dr & \hat{r} \\ r d\theta & \hat{\theta} \\ r \sin\theta d\varphi & \hat{\varphi} \end{cases}$$

2 Formule de Stokes, rotationnel

Motivation: on a souvent besoin de calculer des circulations.

- Idée: la circulation de  $\vec{V}$  (ent),  $\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{V}$  ne dépend que du champ  $\vec{V}$  et du contour  $\mathcal{C}$ , pas du repère.



Carré  $\mathcal{C}$  donné  $\Rightarrow$  choisir le repère au plus simple en profitant des symétries de  $\mathcal{C}$  ( $\Rightarrow$  au max. de composés nulles).

Sur ①:  $d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix}$

$$C_1 = \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} dy V_y(\frac{\epsilon}{2}, y, 0) = \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} dy \left\{ V_y|_0 + \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\partial V_y}{\partial y} y + \frac{\partial V_y}{\partial z} 0 + \dots \right\}$$

$$= V_y|_0 \epsilon + \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{\epsilon^2}{2} + 0 + 0 + \dots$$

sur ②

$$C_2 = \int_{\epsilon/2}^{-\epsilon/2} dx \left\{ V_x|_0 + \frac{\partial V_x}{\partial x} x + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{\epsilon}{2} + 0 + \dots \right\}$$

$$= V_x|_0 (-\epsilon) + 0 + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{\epsilon}{2} (-\epsilon) + 0 + \dots$$

sur ③

$$C_3 = \int_{\epsilon/2}^{-\epsilon/2} dy \left\{ V_y|_0 + \frac{\partial V_y}{\partial x} (-\frac{\epsilon}{2}) + \frac{\partial V_y}{\partial y} y + 0 + \dots \right\}$$

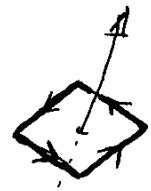
$$= V_y|_0 (-\epsilon) + \frac{\partial V_y}{\partial x} (-\frac{\epsilon}{2})(-\epsilon) + 0 + 0 + \dots$$

&c...

Total:  $C = \epsilon^2 (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})$  (sous-entendu en 0)

- $C = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{V}$  scalaire  $\Rightarrow$  il doit exister une écriture vectorielle (indépendante du repère) pour le rescalter

Effectivement, en définissant



$d^2\vec{S} \hat{=} \hat{n} d^2S$   
 ↑ normale à la surface / choix de sens / circulation

et en associant à 2 vecteurs

$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

le triplet  $\begin{cases} C_x \hat{=} A_y B_z - A_z B_y \\ C_y \hat{=} A_z B_x - A_x B_z \\ C_z \hat{=} A_x B_y - A_y B_x \end{cases}$

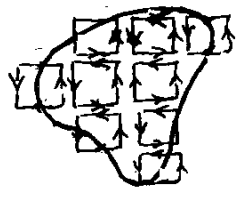
c'est un vecteur!  
 (vérification: géométrique ou algébrique pour la composition / rotations)

ou peut écrire:

$C = \epsilon^2 (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}) = \int_{d^2S} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \end{pmatrix}$  dans le repère utilisé

$C = d^2\vec{S} \cdot (\nabla \wedge \vec{V})$  indépendamment du repère

• Contours plans



- carrelés
- les circulations sur les côtés adjacents se compensent

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{V} \sim \sum_i d^2S \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_i$$

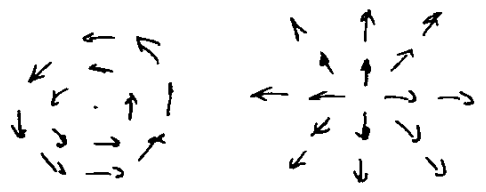
$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{V} = \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} d^2\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})}$$

une formule de Stokes

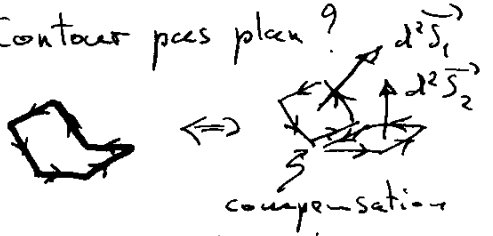
Donc irrotationnel d'un champ vectoriel (indépendant du repère),  $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ , associé au champ  $\vec{V}$  et qui mesure son aptitude à circuler

$\Rightarrow$  rotationnel

( $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = 0 \Rightarrow$  pas de circulation)



• Contours pas plans ?



$$C = C_1 + C_2$$

&c...

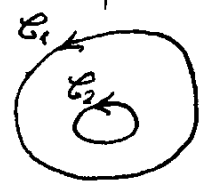
$\Rightarrow$  la formule de Stokes...

encore qu'il existe une liste de surfaces  $\mathcal{S}$  closes par  $\mathcal{C}$  !!

Laquelle prendre ?

N'importe laquelle! (cf. exo suivant, et  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0$ )

Remarque :



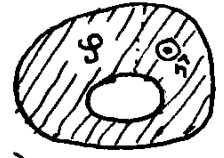
Comparaison de  $\oint_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{V}$  et  $\oint_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{V}$  ?

$$\oint_{\mathcal{C}_1} - \oint_{\mathcal{C}_2} = \oint_{\mathcal{C}_1} + \oint_{-\mathcal{C}_2} = \oint_{\mathcal{C}}$$



circulations opposées, compensation

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{V} - \oint_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{V} = \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} d^2\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})$$



Si  $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = 0$  dans  $\mathcal{S}$ , alors  $\oint_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{V} = \oint_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{V}$ ,

même si  $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \neq 0$  dans à l'intérieur de  $\mathcal{C}_2$  !

- $\vec{V}(p, \varphi, z)$ , prendre des petits contours adaptés à la base locale  
calculer la circulation  $\xrightarrow{\text{Stokes}}$  rotationnel

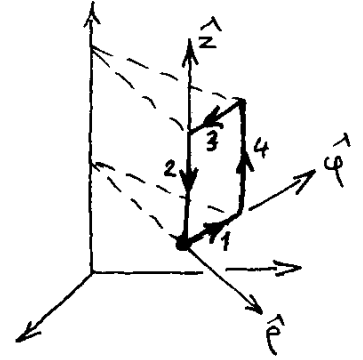
$$C_1 = V_\varphi p d\varphi$$

$$C_3 = -(V_\varphi + \partial_z V_\varphi dz + \dots) p d\varphi$$

$$C_2 = -V_z dz$$

$$C_4 = (V_z + \partial_\varphi V_z d\varphi + \dots) dz$$

$$(\vec{\nabla}_\perp \vec{V})_p p d\varphi dz = (\partial_\varphi V_z - p \partial_z V_\varphi) d\varphi dz$$



$$(\vec{\nabla}_\perp \vec{V})_p = \frac{1}{p} \partial_\varphi V_z - \partial_z V_\varphi$$

$$C_1 = V_z dz$$

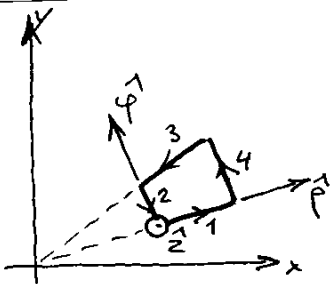
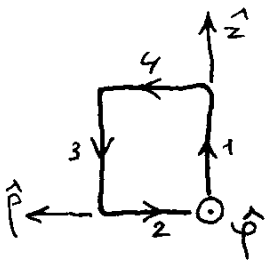
$$C_3 = -(V_z + \partial_\varphi V_z d\varphi) dz$$

$$C_2 = -V_\varphi d\varphi$$

$$C_4 = (V_\varphi + \partial_z V_\varphi dz) d\varphi$$

$$(\vec{\nabla}_\perp \vec{V})_\varphi dp dz = (\partial_z V_\varphi - \partial_\varphi V_z) dp dz$$

$$(\vec{\nabla}_\perp \vec{V})_\varphi = \partial_z V_\varphi - \partial_\varphi V_z$$



$$(\vec{\nabla}_\perp \vec{V})_z dp p d\varphi = V_\varphi d\varphi \quad (1)$$

$$-(V_\varphi + \partial_\varphi V_\varphi d\varphi) d\varphi \quad (3)$$

$$-V_\varphi p d\varphi \quad (2)$$

$$+(V_\varphi + \partial_p V_\varphi dp) (p+dp) d\varphi \quad (4)$$

attention!

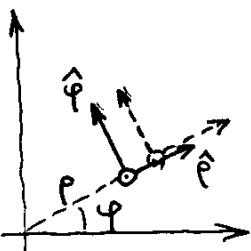
$$= (V_\varphi + p \partial_p V_\varphi - \partial_\varphi V_\varphi) dp d\varphi$$

$$(\vec{\nabla}_\perp \vec{V})_z = \frac{1}{p} [\partial_p (p V_\varphi) - \partial_\varphi V_p]$$

3 méthode alternative, plutôt plus simple dans le cas des coordonnées cylindriques :

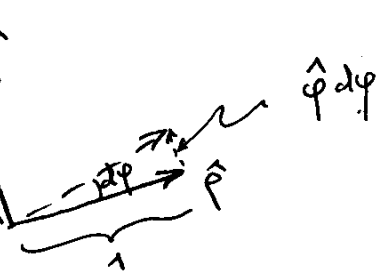
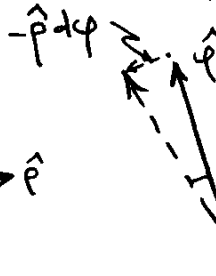
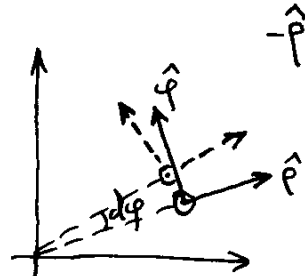
$$\vec{\nabla}_\perp \vec{V} = (\hat{p} \partial_p + \hat{\varphi} \frac{1}{p} \partial_\varphi + \hat{z} \partial_z) \wedge (\hat{p} V_p + \hat{\varphi} V_\varphi + \hat{z} V_z)$$

vecteurs de base locale, dépendent du point de l'espace



→ indépendants de p }  
de même " " z }

reste  $\hat{p}(\varphi), \hat{\varphi}(\varphi), \hat{z}$



$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_\varphi \hat{r} = \hat{\varphi} \\ \partial_\varphi \hat{\varphi} = -\hat{r} \end{cases} \quad (\text{très pratique aussi en circulation du point})$$

Alors :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_A \vec{V} &= \hat{r} \wedge (\hat{r} \partial_r V_r + \hat{\varphi} \partial_r V_\varphi + \hat{z} \partial_r V_z) \\ &+ \hat{\varphi} \wedge \frac{1}{r} (\partial_\varphi \hat{r} V_r + \hat{r} \partial_\varphi V_r + \partial_\varphi \hat{\varphi} V_\varphi + \hat{\varphi} \partial_\varphi V_\varphi + \hat{z} \partial_\varphi V_z) \\ &+ \hat{z} \wedge (\hat{r} \partial_z V_r + \hat{\varphi} \partial_z V_\varphi + \hat{z} \partial_z V_z) \\ &= \hat{z} \partial_r V_\varphi - \hat{\varphi} \partial_r V_z \\ &\quad - \hat{z} \frac{1}{r} \partial_\varphi V_r + \hat{z} \frac{1}{r} V_\varphi + \hat{r} \partial_\varphi V_z \\ &\quad + \hat{\varphi} \partial_z V_r - \hat{r} \partial_z V_\varphi \\ &= \hat{r} (\partial_\varphi V_z - \partial_z V_\varphi) + \hat{\varphi} (\partial_z V_r - \partial_r V_z) + \hat{z} (\partial_r V_\varphi + \frac{1}{r} V_\varphi - \frac{1}{r} \partial_\varphi V_r) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_A \vec{V} = \hat{r} (\partial_\varphi V_z - \partial_z V_\varphi) + \hat{\varphi} (\partial_z V_r - \partial_r V_z) + \hat{z} \frac{1}{r} [\partial_r (r V_\varphi) - \partial_\varphi V_r]}$$

Méthode très pratique...

- en pratique (!) (électrodynamique, hydrodynamique) car les champs  $\vec{V}(r, \varphi, z)$  ont généralement des symétries et invariances  $\Rightarrow$  calcul en qq lignes.
- mais malheureusement pas en coordonnées sphériques, car la base locale  $\gamma$  est par trop locale :

$$\hat{r}(\vartheta, \varphi), \hat{\vartheta}(\vartheta, \varphi), \hat{\varphi}(\vartheta, \varphi)$$

$\hat{r}$   $\hat{\vartheta}$   $\hat{\varphi}$   
 dépendance compliquée,  
 dérivées  $\partial_\vartheta, \partial_\varphi$  compliquées

•  $\vec{V}(r, \theta, \varphi)$

$(\vec{\nabla}_\perp \vec{V})_r = r d\theta r \sin\theta d\varphi$

$= V_\theta r d\theta \quad (1)$

$-(V_\theta + \partial_\varphi V_\theta d\varphi) r d\theta \quad (3)$

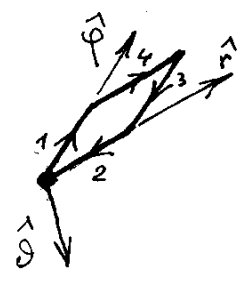
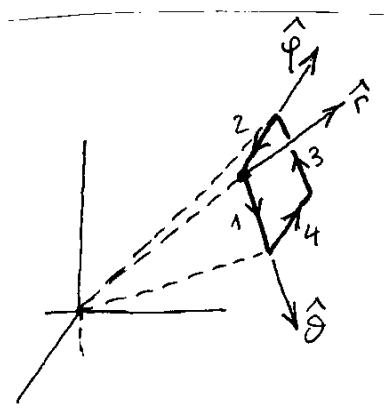
$-V_\varphi r \sin\theta d\varphi \quad (2)$

$+ (V_\varphi + \partial_\theta V_\varphi d\theta) r \sin(\theta + d\theta) d\varphi \quad (4)$

$= (V_\varphi \cos\theta + \partial_\theta V_\varphi \sin\theta - \partial_\varphi V_\theta) r d\theta d\varphi$

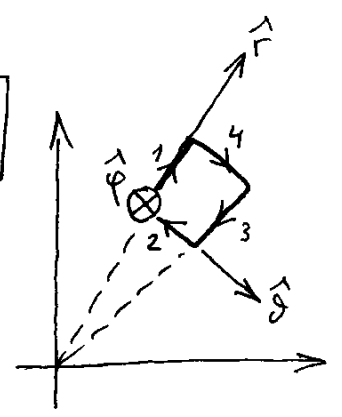
$= \frac{1}{r \sin\theta} (\cos\theta V_\varphi + \sin\theta \partial_\theta V_\varphi - \partial_\varphi V_\theta) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

$\Rightarrow (\vec{\nabla}_\perp \vec{V})_r = \frac{1}{r \sin\theta} [\partial_\theta (\sin\theta V_\varphi) - \partial_\varphi V_\theta]$



$(\vec{\nabla}_\perp \vec{V})_\theta = \frac{1}{r \sin\theta} [\partial_\varphi V_r - \partial_r (r \sin\theta V_\varphi)]$

$(\vec{\nabla}_\perp \vec{V})_\varphi = \frac{1}{r} [\partial_r (r V_\theta) - \partial_\theta V_r]$



**3 Formule de Stokes, divergence**

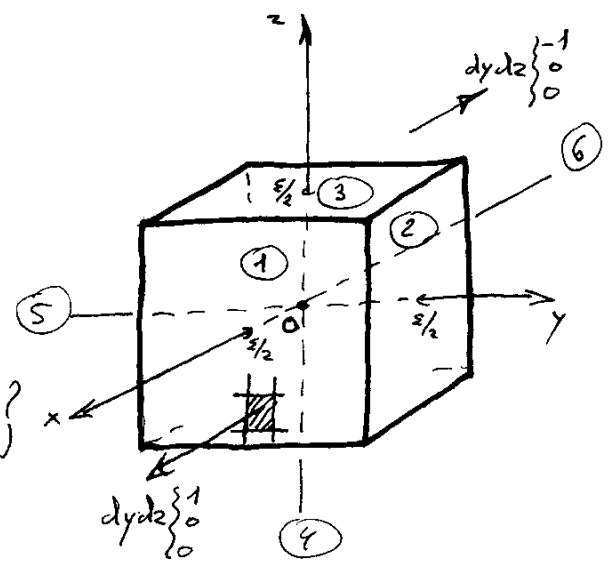
• Choisir le repère adapté aux symétries du cube (origine, axes)

Face ① :

$F_1 = \int d^2\vec{S} \cdot \vec{V}$

$= \iint dydz \left\{ V_x|_0 + \partial_x V_x|_0 \frac{\epsilon}{2} + \partial_y V_x|_0 y + \partial_z V_x|_0 z + \dots \right\} x$

$= V_x|_0 \epsilon^2 + \partial_x V_x|_0 \frac{\epsilon^3}{2} + 0 + 0 + \dots$



$$F_0 = \iint dy dz (-) \left\{ U_{x_0} + \frac{\partial U_{x_0}}{\partial x} \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\partial U_{x_0}}{\partial y} y + \frac{\partial U_{x_0}}{\partial z} z + \dots \right\}$$

$$= -U_{x_0} \varepsilon^2 + \frac{\partial U_{x_0}}{\partial x} \frac{\varepsilon^3}{2} + 0 + 0 + \dots$$

&tc...

Total:

$$F = \varepsilon^3 \left( \frac{\partial U_{x_0}}{\partial x} + \frac{\partial U_{y_0}}{\partial y} + \frac{\partial U_{z_0}}{\partial z} \right)$$

$$\bullet \quad F \hat{=} \int_{\mathcal{V}} d^3 \vec{s} \cdot \vec{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \int d^3 r \nabla \cdot \vec{V}}$$

$\downarrow$  scal.       $\uparrow$  vect.       $\uparrow$  vect.

où  $\nabla \cdot \vec{V}$  est

- est un champ scalaire associé au champ  $\vec{V}$ ,
- qui mesure son aptitude à fluxer (si  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , alors  $F = 0$ )
- appelé pour cette raison divergence du champ

• A travers une surface fermée  $\mathcal{V}$  :

- cuber le volume,
- les flux à travers les faces adjacentes se compensent

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{V}} d^3 \vec{s} \cdot \vec{V} \sim \sum_i \int d^3 r \nabla \cdot \vec{V}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\mathcal{V}} d^3 \vec{s} \cdot \vec{V} = \int_{\mathcal{V}} d^3 r \nabla \cdot \vec{V}}$$

ENCORE UNE formule de Stokes

Moralité :

Une pléiade de formules de Stokes

$$\int_{\mathcal{D}} \omega = \int_{\mathcal{D}} d\omega$$

la 1<sup>ère</sup> étant:  $f(b) - f(a) = \int_a^b dx \frac{df}{dx}$

Peut-être l'outil mathématique le plus important de la physique du XX<sup>e</sup> siècle

Calculs de circulation, de flux, unicité des solutions d'éqs aux dérivées partielles, ...

Il ne faut pas penser:

~~les formules de Stokes sont des propriétés du rotationnel, de la div...~~

mais :

le rotationnel, la divergence sont des concepts qui sont introduits parcequ'il y a des formules de Stokes.

•  $\vec{V}(p, \varphi, z)$

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \int_{\mathcal{S}} d^2S \cdot \vec{V}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} dp p d\varphi dz = -V_p p d\varphi dz \quad (1)$$

$$+ (V_p + \partial_p V_p dp)(p + dp) d\varphi dz \quad (6)$$

$$- V_\varphi dp dz \quad (2)$$

$$+ (V_\varphi + \partial_\varphi V_\varphi d\varphi) dp dz \quad (5)$$

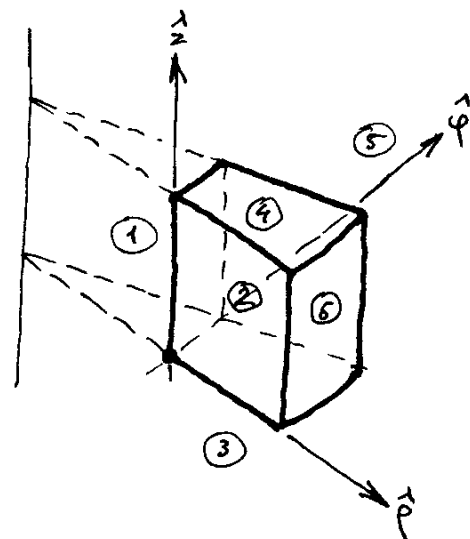
$$- V_z p d\varphi dz \quad (3)$$

$$+ (V_z + \partial_z V_z dz) p d\varphi dz \quad (4)$$

$$= (V_p + p \partial_p V_p + \partial_\varphi V_\varphi + p \partial_z V_z) dp d\varphi dz$$

$$= \left[ \frac{1}{p} (V_p + p \partial_p V_p + \partial_\varphi V_\varphi) + \partial_z V_z \right] p dp d\varphi dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{p} \partial_p (p V_p) + \frac{1}{p} \partial_\varphi V_\varphi + \partial_z V_z}$$



Par la méthode plus courte :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = (\hat{p} \partial_p + \hat{\varphi} \frac{1}{p} \partial_\varphi + \hat{z} \partial_z) \cdot (\hat{p} V_p + \hat{\varphi} V_\varphi + \hat{z} V_z)$$

$$= \hat{p} \cdot (\hat{p} \partial_p V_p + \hat{\varphi} \partial_\varphi V_\varphi + \hat{z} \partial_p V_z)$$

$$+ \hat{\varphi} \cdot \frac{1}{p} (\hat{\varphi} V_p + p \partial_\varphi V_p - \hat{p} V_\varphi + \hat{\varphi} \partial_\varphi V_\varphi + \hat{z} \partial_\varphi V_z)$$

$$+ \hat{z} \cdot (\hat{p} \partial_z V_p + \hat{\varphi} \partial_z V_\varphi + \hat{z} \partial_z V_z)$$

$$= \partial_p V_p$$

$$+ \frac{1}{p} V_p + \frac{1}{p} \partial_\varphi V_\varphi$$

$$+ \partial_z V_z$$

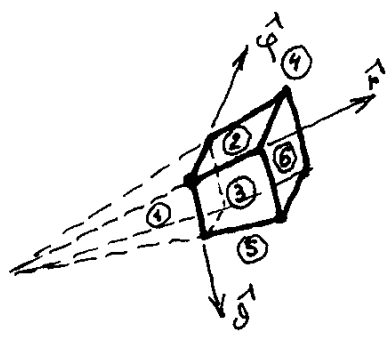
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{p} \partial_p (p V_p) + \frac{1}{p} \partial_\varphi V_\varphi + \partial_z V_z$$

Refrain :

- très pratique pour des champs spécifiques,  
p.ex.  $\hat{p} V(p)$ , ou  $\hat{\varphi} V(p)$ .

- pas pratique pour les coordonnées sphériques.

•  $\vec{V}(r, \vartheta, \varphi)$



$$\begin{aligned}
 F_1 &= -V_r r d\vartheta r \sin\vartheta d\varphi \\
 F_2 &= (V_r + \partial_r V_r dr)(r+dr) d\vartheta (r+dr) \sin\vartheta d\varphi \\
 F_3 &= -V_\vartheta dr r \sin\vartheta d\varphi \\
 F_4 &= (V_\vartheta + \partial_\vartheta V_\vartheta d\vartheta) dr r \sin(\vartheta+d\vartheta) d\varphi \\
 F_5 &= -V_\varphi dr r d\vartheta \\
 F_6 &= (V_\varphi + \partial_\varphi V_\varphi d\varphi) dr r d\vartheta
 \end{aligned}$$

Stokes  $\Rightarrow$

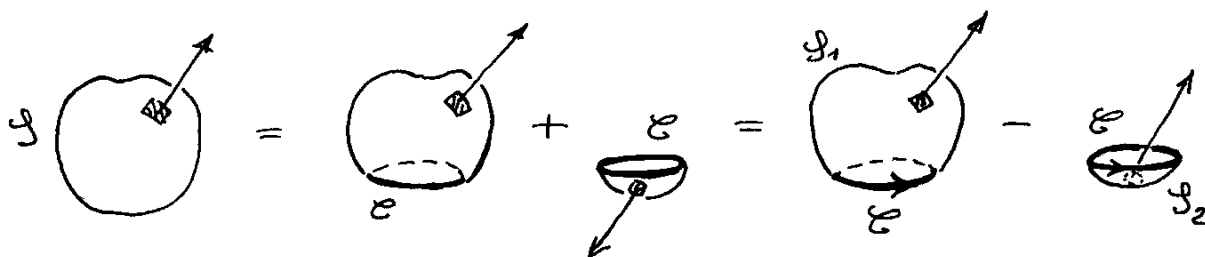
$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} dr r d\vartheta r \sin\vartheta d\varphi &= (V_r r + \partial_r V_r r^2) dr d\vartheta \sin\vartheta d\varphi \\
 &\quad + (V_\vartheta \cos\vartheta + \partial_\vartheta V_\vartheta \sin\vartheta) r dr d\vartheta d\varphi \\
 &\quad + \partial_\varphi V_\varphi r dr d\vartheta d\varphi \\
 &= \left\{ \frac{1}{r^2} (2rV_r + r^2 \partial_r V_r) + \frac{1}{r \sin\vartheta} (V_\vartheta \cos\vartheta + \sin\vartheta \partial_\vartheta V_\vartheta) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r \sin\vartheta} \partial_\varphi V_\varphi \right\} r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \partial_\vartheta (\sin\vartheta V_\vartheta) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \partial_\varphi V_\varphi}$$

OUF!

## Complément

A propos des intégrales de flux  $\int_{\mathcal{S}} d^2\vec{S} \cdot \vec{V}$



$\Rightarrow$  dans une région où  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ,

$$\int_{\mathcal{S}} d^2\vec{S} \cdot \vec{V} = \int_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

alors :

$$\int_{\mathcal{S}_1(\mathcal{V})} d^2\vec{S} \cdot \vec{V} = \int_{\mathcal{S}_2(\mathcal{V})} d^2\vec{S} \cdot \vec{V}$$

Si un champ est à divergence nulle, alors son flux à travers une surface ne dépend que de la clôture de la surface et pas du détail de celle-ci.

C'est justement le cas d'un champ de rotationnel.

#### 4 Représentation complexe

Exercice simplet de calcul de gradient, divergence et rotationnel...

$$\begin{aligned} \partial_x e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} &= \partial_x e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \\ &= i k_x e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = i\vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}} \quad \text{facile!}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = i\vec{k} \wedge \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Comparat avec :

$$\partial_x \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) = -k_x \sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$\vec{\nabla} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) = -\vec{k} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

etc...

Soit, dans ce cas  $\left\{ \begin{array}{l} \cos \rightarrow \sin \\ + \rightarrow - \end{array} \right.$

multiple occasions d'erreurs!

Avantages de la représentation complexe :

- la dérivation facile,
- la combinaison facile, p. ex.

$$a \cos(\omega t + \varphi_a) + b \cos(\omega t + \varphi_b) = ?$$

$$= \Re \left\{ (a e^{i\varphi_a} + b e^{i\varphi_b}) e^{i\omega t} \right\} !$$

Attention quand il s'agit d'expressions non linéaires.  
(p. ex. l'énergie, le vecteur de Poynting du champ électromagn.)

Exemple :

$$\text{champ physique} \quad E = \Re \hat{E} \quad \text{champ complexe}$$

$$\text{densité d'énergie} \quad E^2 = (\Re \hat{E})^2$$

$$\neq (\Re \hat{E}^2)$$

## 5 Méthodes qualitatives

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$  ?
  - un scalaire
  - construit avec le seul ingrédient  $\vec{r}$
  - sans dimension ( $[\nabla] = L^{-1}$ ,  $[\vec{r}] = L$ )

$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \alpha}$  une constante sans dimension, probablement voisine de 1 en vertu du principe fondé sur l'expérience: dans un livre de physique pris au hasard, dans une formule prise au hasard, les constantes sans dimension sont voisines de 1! (P.ex. 2,  $1/3$ ,  $2\pi$ ,  $4\pi/3$ , ...)

- $\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$  ?
  - scalaire
  - ingrédient  $\vec{r}$
  - dimension  $L^{-1}$ $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\alpha}{r}}$   $r \neq 0$

- $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = ?$ 
  - vecteur
  - dimension  $L^{-2}$
  - ingrédient  $\vec{r}$ $\boxed{\vec{\nabla} \frac{1}{r} = \alpha \frac{\vec{r}}{r^3}}$   $r \neq 0$

- $\Delta r^n = \alpha(n) r^{n-2}$   $r \neq 0$  si  $n-2 < 0$

↑ (à moins qu'on soit plus sûr que ce soit  $\approx 1$  (c'est pas une constante!))

- $\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{b}|} \right) = \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{b}|} = ?$ 
  - vecteur
  - dim  $\frac{a}{|\vec{r}-\vec{b}|^2}$
  - linéaire /  $\vec{a}$

Ingrédients :

- vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{r}-\vec{b}$ ,  $\vec{a} \wedge (\vec{r}-\vec{b})$
  - scalaires  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{r}-\vec{b}|$ ,  $\vec{a} \cdot (\vec{r}-\vec{b})$
- ↑ pas linéaire

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{b}|} = \alpha \frac{\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{b}|^2} + \beta [\vec{a} \cdot (\vec{r}-\vec{b})] \frac{\vec{r}-\vec{b}}{|\vec{r}-\vec{b}|^4} + \gamma \frac{\vec{a} \wedge (\vec{r}-\vec{b})}{|\vec{r}-\vec{b}|^3}$$

Parentèse :

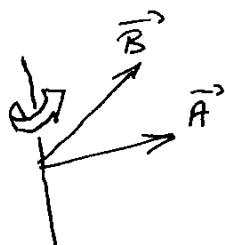
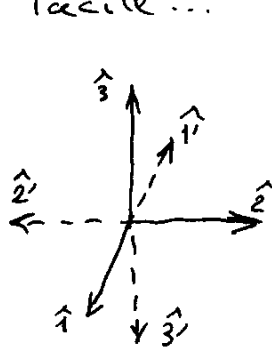
vecteur  $\hat{=}$  triplet qui au cours d'une rotation du repère se transforme comme  $(dx, dy, dz)$

exemples :

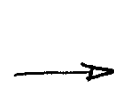
$$\begin{cases} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{cases}, \begin{cases} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{cases}, \begin{cases} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{cases}$$

Mais comment se comportent les vecteurs au cours d'une réflexion du repère ?

Facile ...

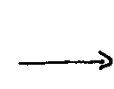


$$\begin{cases} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} A'_1 = -A_1 \\ A'_2 = -A_2 \\ A'_3 = -A_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} B'_1 = -B_1 \\ B'_2 = -B_2 \\ B'_3 = -B_3 \end{cases}$$

$$\text{mais } \begin{cases} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - \dots \\ A_1 B_2 - \dots \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A'_2 B'_3 - A'_3 B'_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A'_3 B'_1 - \dots = A_3 B_1 - \dots \\ A'_1 B'_2 - \dots = A_1 B_2 - \dots \end{cases} !$$

Donc deux types de comportements :

- 1)  $\vec{A}, \vec{B}$ , on les appelle des vecteurs polaires ou (vrais) vecteurs
- 2)  $\vec{A} \wedge \vec{B}$ , on les appelle des vecteurs axiaux ou pseudo vecteurs

Conclusion : si on veut une expression dont la forme soit totalement indépendante du repère (directions et sens), il faut qu'elle soit équilibrée non seulement par rapport aux rotations (scalaire = scalaire, vecteur = vecteur) mais aussi par rapport aux réflexions (vecteur polaire = vecteur polaire, vecteur axial = vecteur axial, pseudo scalaire = pseudo scalaire, &c...), en se souvenant que :

$$\text{vecteurs polaires : } \vec{V}' = \vec{V}, \vec{W}' = \vec{W}, \&c \dots$$

$$\text{vecteurs axiaux : } \vec{A}' = -\vec{A}, \vec{B}' = -\vec{B},$$

$$(\vec{V} \wedge \vec{W})' = -\vec{V} \wedge \vec{W}$$

&c...

Pour en revenir à l'expression proposée, ça implique

$\vec{b}$  vecteur comme  $\vec{r}$ ,

et à l'expression cherchée, ça implique

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{b}|} = \gamma \frac{\vec{a} \wedge (\vec{r}-\vec{b})}{|\vec{r}-\vec{b}|^3}$$

joli, non ?

Calculs effectifs

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{3}$$

excellent rapport qualité/prix  
de l'estimation qualitative!

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}, \quad \partial_x \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad \boxed{r \neq 0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{2}{r}} \quad (\text{refrain})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r} = \begin{cases} \partial_x (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = -\frac{x}{r^3} \\ \partial_y ( \quad )^{-1/2} = -\frac{y}{r^3} \\ \partial_z ( \quad )^{-1/2} = -\frac{z}{r^3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}} \quad \boxed{r \neq 0} \quad (\text{refrain})$$

$\Delta r^n$ ? parmi différentes méthodes, la + terre à terre :

$$\Delta r^n = \underbrace{\partial_x \partial_x (x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} + \partial_y \partial_y ( \quad )^{\frac{n}{2}} + \partial_z \partial_z ( \quad )^{\frac{n}{2}}}_{\begin{cases} = \partial_x \frac{n}{2} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1} 2x \\ = n \left\{ \left(\frac{n}{2}-1\right) (x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-2} 2x^2 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1} \right\} \\ = n \left\{ (n-2) r^{n-4} x^2 + r^{n-2} \right\} \end{cases}}$$

$$\Delta r^n = n \left\{ (n-2) r^{n-4} r^2 + 3 r^{n-2} \right\}$$

$$\boxed{\Delta r^n = n(n+1) r^{n-2}} \quad \text{pour } \boxed{r \neq 0 \text{ si } n < 2} \quad (\text{refrain})$$

Vérification :  $\Delta \frac{1}{r} = 0$ ,  $r \neq 0$  (potentiel d'une charge)

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{b}|} ? \quad \partial_y \frac{a_z}{[(x-b_x)^2+(y-b_y)^2+(z-b_z)^2]^{3/2}} = a_z \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2(y-b_y)}{[ \quad ]^{5/2}} \\ = -a_z \frac{(y-b_y)}{|\vec{r}-\vec{b}|^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{b}|} = \vec{a} \wedge \frac{\vec{r}-\vec{b}}{|\vec{r}-\vec{b}|^3}} \quad (\text{refrain})$$

## 6 Méthodes qualitatives

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = (-) \text{champ électrique du dipôle}$$

$\underbrace{\left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)}_{\text{potentiel du dipôle}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = ? \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteur (comme } \vec{p} \text{)} \\ \text{dimension } \frac{p}{L^3} \\ \text{linéaire / } \vec{p} \end{array} \right.$$

Ingrédients:

- vecteurs  $\vec{p}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{p} \wedge \vec{r}$
  - scalaires  $|\vec{p}|$ ,  $|\vec{r}|$ ,  $\vec{p} \cdot \vec{r}$ , et c'est tout...
- (pas linéaire)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \alpha \underbrace{\frac{1}{r^3} \vec{p}}_{\text{Polaire}} + \beta \underbrace{\frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r}}_{\text{Pol}} + \gamma \underbrace{\frac{1}{r^4} (\vec{p} \wedge \vec{r})}_{\text{Axial}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \alpha \frac{\vec{p}}{r^3} + \beta \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right]}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) = \text{champ magnétique du moment magnétique } \vec{m}$$

$\vec{m}$  Axial  $\Rightarrow \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}$  Polaire

$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \right)$  Axial

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) = \alpha \frac{\vec{m}}{r^3} + \beta \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5}}$$

Calcul effectif, par une méthode high tech:

$$\text{composante } i: \quad d_i \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = d_i \frac{p_j r_j}{(r_k r_k)^{3/2}} = p_j d_i \frac{r_j}{(r_k r_k)^{3/2}}$$

$$= p_j \left\{ \frac{\delta_{ij}}{r^3} + r_j \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{1}{r^5} 2r_i \right\} = \frac{p_i}{r^3} - 3 \frac{p_j r_j}{r^5} r_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{p}}{r^3} - 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5}} \quad \text{cf. estimation qualitative}$$

Par une méthode cool :

choix d'axe t.q.  $\vec{m} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ m \end{cases} \Rightarrow \vec{m} \cdot \vec{r} = \begin{cases} m y \\ -m x \\ 0 \end{cases}$

$$\vec{\nabla}_A \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ -m \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right] \end{cases} = -\frac{2m}{r^3} + 3 \frac{m(x^2+y^2)}{r^5}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow \frac{1}{r^3} - 3 \frac{x^2}{r^5}} = \frac{m}{r^3} - 3 \frac{m z^2}{r^5}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_A \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{m}}{r^3} - 3 \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5}}$$

## 7 Identités remarquables

Avec le truc de Feynman... (avec la règle de Leibniz pour la dérivée d'un produit)

$$\vec{\nabla}(fg) = (\vec{\nabla}_f + \vec{\nabla}_g)(fg) = \vec{\nabla}_f fg + \vec{\nabla}_g fg = \vec{\nabla}_f f g + f \vec{\nabla}_g g$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}(fg) = f \vec{\nabla}_g + g \vec{\nabla}_f}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) = \vec{\nabla}_f \cdot f \vec{v} + \vec{\nabla}_v \cdot f \vec{v} = \vec{\nabla}_f f \cdot \vec{v} + f \vec{\nabla}_v \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) = f \vec{\nabla}_v \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_f}$$

$$\vec{\nabla}_\wedge (f\vec{v}) = \vec{\nabla}_f \wedge f\vec{v} + \vec{\nabla}_v \wedge f\vec{v} = \vec{\nabla}_f f \wedge \vec{v} + f \vec{\nabla}_v \wedge \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_\wedge (f\vec{v}) = f \vec{\nabla}_v \wedge \vec{v} + \vec{\nabla}_f \wedge \vec{v}}$$

et enfin, un peu moins trivial :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_v \cdot (\vec{v}_\wedge \vec{w}) &= \vec{\nabla}_v \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{\nabla}_w \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \\ &= \vec{w} \cdot (\vec{\nabla}_v \wedge \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{\nabla}_w) \\ &= \vec{w} \cdot (\vec{\nabla}_v \wedge \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla}_w \wedge \vec{w}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_v \cdot (\vec{v}_\wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{\nabla}_v \wedge \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla}_w \wedge \vec{w})}$$

## 8 Encore des identités remarquables

... par la méthode high tech par exemple (toute indiquée dans ce cas).

$$\vec{\nabla}_v \cdot \vec{\nabla} f = \partial_i \partial_i f = \boxed{\Delta f} \quad !$$

$$\boxed{[\vec{\nabla}_\wedge (\vec{\nabla} f)]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f = 0} \quad !$$

Explications :

$$\begin{aligned} 1) [\vec{A} \wedge \vec{B}]_1 &\hat{=} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ &= \underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1} A_2 B_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{=-1} A_3 B_2 + \underbrace{\varepsilon_{111}}_{=0} A_1 B_1 + \underbrace{\varepsilon_{112}}_{=0} A_1 B_2 + \dots \\ &= \varepsilon_{1jk} A_j B_k \quad \Rightarrow \quad [\vec{A} \wedge \vec{B}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \end{aligned}$$

e) Soit  $S_{ij} = S_{ji}$  et  $A_{ij} = -A_{ji}$

Alors :

$$\begin{aligned} A_{ij} S_{ij} &= -A_{ji} S_{ji} \\ &= -A_{ij} S_{ij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc :  $\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k = 0$

$\leftarrow$  anti  $\quad \leftarrow$  symétrique

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j V_k = \boxed{0}$$

$\leftarrow$  sym.

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l V_m \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \partial_j \partial_l V_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l V_m \quad \leftarrow \text{développement inutile avec de l'entraînement.} \\ &= \partial_j \partial_i V_j - \partial_j \partial_j V_i \\ &= \partial_i \partial_j V_j - \partial_j \partial_j V_i \quad \leftarrow " \\ &= \partial_i \vec{\nabla} \cdot \vec{V} - \Delta V_i \quad \leftarrow " \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}}$$

Explication ; 2 cas exemplaires :

$$\underbrace{\epsilon_{11k}}_{=0} \epsilon_{lmk} = 0$$

$$\epsilon_{12k} \epsilon_{lmk} = \underbrace{\epsilon_{121}}_{=0} \epsilon_{lm1} + \underbrace{\epsilon_{122}}_{=0} \epsilon_{lm2} + \underbrace{\epsilon_{123}}_{=1} \epsilon_{lm3}$$

$$= \epsilon_{lm3} = \begin{cases} 1 & \text{si } l=1, m=2 \\ -1 & \text{si } l=2, m=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

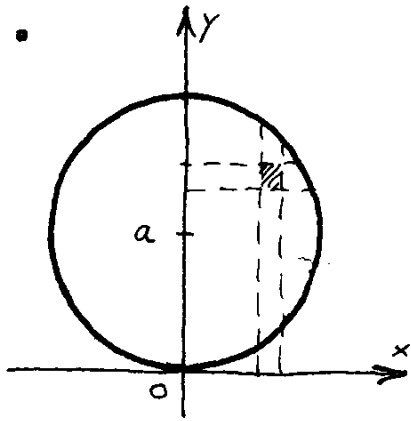
$$= \delta_{1l} \delta_{2m} - \delta_{1m} \delta_{2l}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

9 Calculs de flux et de circulation

•  $\vec{V} = \begin{cases} \alpha y^2 \\ \beta z^2 \\ \gamma x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{W} \triangleq \nabla \wedge \vec{V} = \begin{cases} -2\beta z \\ -2\gamma x \\ -2\alpha y \end{cases}$



$\int_{\mathcal{S}} d^2\vec{S} \cdot \vec{W} = \int_{-a}^a dx \int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} dy (-2\alpha y)$

estimation (dimension): le résultat est nécessairement proportionnel à  $\alpha a^3$ .

Calcul :

$\int_{\mathcal{S}} d^2\vec{S} \cdot \vec{W} = -\alpha \int_{-a}^a dx y^2 \Big|_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}}$

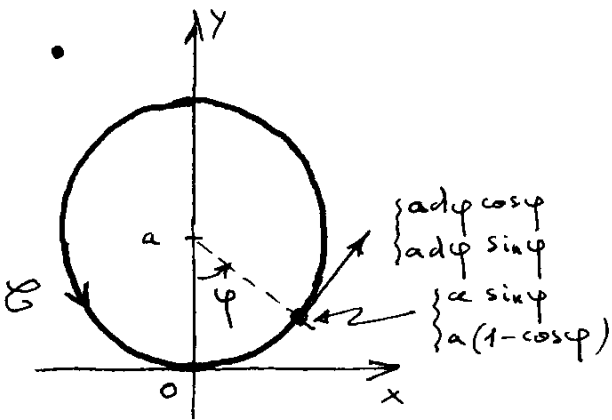
$= -\alpha \int_{-a}^a dx 4a\sqrt{a^2-x^2} = -4\alpha a \int_{-1}^1 d\left(\frac{x}{a}\right) a \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$

$= -4\alpha a^3 \int_{-1}^1 du \sqrt{1-u^2} = -4\alpha a^3 \int_{-1}^1 d(\cos v) \sqrt{1-\cos^2 v}$

$= -4\alpha a^3 \int_{\pi}^0 dv (-\sin v) \sin v = -4\alpha a^3 \int_0^{\pi} dv \sin^2 v$

$= -2\alpha a^3 \int_0^{\pi} dv (1-\cos 2v)$

$\Rightarrow \int_{\mathcal{S}} d^2\vec{S} \cdot \vec{W} = -2\pi \alpha a^3$



$\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{V} = \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} a d\phi \cos \phi \alpha a^2 (1-\cos \phi)^2 \\ + a d\phi \sin \phi \beta a^2 \end{matrix} \right\}$

$= \alpha a^3 \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi (1-\cos \phi)^2$

$= \alpha a^3 \int_0^{2\pi} d\phi (\cos \phi - 2\cos^2 \phi + \cos^3 \phi)$

$= -\alpha a^3 \int_0^{2\pi} d\phi (1+\cos 2\phi)$

$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{V} = -2\pi \alpha a^3$

$= \int_{\mathcal{S}} d^2\vec{S} \cdot \vec{W}$  ! merveille...

mais pas mystère pour qui connaît la formule de Stokes

... encore que, qui peut se vanter de comprendre réellement ce qui se passe dans la formule de Stokes ?



$$\int_{S_1} d^2\vec{S} \cdot \vec{W} = \int_{S_1} d^2\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \int_{\mathcal{V}} d\vec{r} \cdot \vec{V}$$

et même chose pour  $\int_{S_2} d^2\vec{S} \cdot \vec{W} \Rightarrow \int_{S_1} d^2\vec{S} \cdot \vec{W} = \int_{S_2} d^2\vec{S} \cdot \vec{W}$  !

$$\int_{S_3} d^2\vec{S} \cdot \vec{W} = \int_{V_3} d^3r \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})}_{=0} = 0$$

$$\int_{S_3} d^2\vec{S} \cdot \vec{V} = \int_{V_3} d^3r \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}}_{=0} = 0$$

- Le champ statique  $\vec{V}$  ne peut être un champ magnétique que si

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}, \text{ c'est le cas, } \boxed{\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} (-z) \begin{cases} \beta z \\ \delta x \\ \alpha y \end{cases}}$$

c'est réalisable (?) mais en tout cas seulement dans une région très finie de l'espace car  $\vec{J} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$ .

### Supplément

La méthode high tech est pratique pour montrer bien d'autres ident. remarquables, par ex :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \left\{ \vec{B} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right\}$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) + \vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

(utile en hydrodynamique pour pétauger dans l'équation de Navier-Stokes, grâce à :

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{\nabla} \frac{\vec{\nabla}^2}{2} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \dots)$$