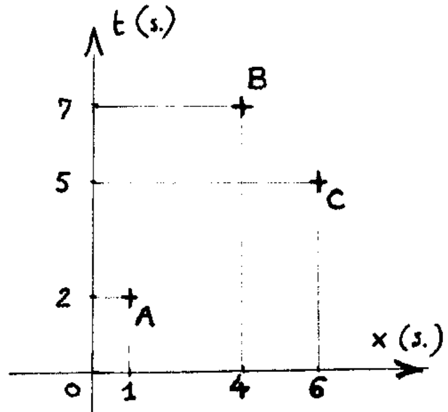
Paris 7
DEUG SSM
1989 - 90

ELECTROMAGNETISME (ΦA 215 - 216)

Travaux dirigés - Feuille 7

① **Relations entre événements** (piqué dans Taylor & Wheeler, A la découverte de l'espace-temps, le meilleur ouvrage d'introduction à la relativité)



La figure représente trois événements A, B et C dans le diagramme d'espace-temps du laboratoire. Répondre aux questions suivantes pour la paire d'événements formée par A et B :

1°/ L'intervalle entre ces deux événements est-il un intervalle-temps, un intervalle-lumière ou un intervalle-espace ?

2°/ Quel est le temps propre qui les sépare ?

3°/ Est-il possible que l'un des événements soit causé par l'autre ?

Répondre aux mêmes questions pour les paires d'événements A et C, puis C et B.

---

② **Ordre des événements dans le temps** (Taylor & Wheeler)

"L'événement G s'est produit avant l'événement H". Montrer que l'ordre dans lequel deux événements se succèdent dans le temps n'est le même dans le système du laboratoire et dans n'importe quel système mobile que si la séparation de ces deux événements est un intervalle-temps ou un intervalle-lumière.

---

③ **Effet Doppler relativiste**

Colin a une vitesse $v = 4/5$ par rapport à Chloé. Celle-ci choisit son axe $\hat{x}$ selon la vitesse de Colin. Tous deux conviennent d'utiliser des axes en configuration standard et l'unité légale de temps. Colin émet à intervalles de temps réguliers $\Delta\tau$ à sa montre (disons $\Delta\tau = 1$ s.) des signaux électromagnétiques.

1°/ Avant tout calcul, représentez d'abord l'allure de tout ce scénario sur un graphe d'espace-temps (x, t) dans le repère de Chloé.

2°/ Calculez l'intervalle Δt qui, pour Chloé, sépare deux émissions successives de Colin.

3°/ Calculez l'intervalle Δt_R qui, pour Chloé, sépare deux réceptions successives, par Chloé, des signaux émis par Colin.

---

④ **Durée de vie des muons**

On prépare un faisceau de muons ($m = 106$ MeV, vie moyenne $\tau = 2{,}20 \times 10^{-6}$ s.) d'énergie $e = 176$ MeV.

1°/ Quelle est la valeur du facteur γ correspondant ?

2°/ Quelle est la vitesse v de ces muons ?

3°/ Quelle est la durée de vie moyenne observée dans le laboratoire pour ces muons ?

4°/ Quel est leur parcours moyen ?

5 La masse invariante

1°/ Quelle est la signification de la quantité $e^2 - \vec{p}^{\,2}$ qui peut être associée à une particule de masse m, énergie e, impulsion $\vec{p}$? Comment se transforme-t-elle, c.-à-d. quelle est la valeur de $e'^2 - \vec{p}'^2$ associée à la même particule dans un autre repère équivalent ? Ecrire les expressions de e et $\vec{p}$ sous forme de dérivées par rapport au temps propre de la particule. En déduire les lois de transformation donnant e' et les composantes de $\vec{p}'$ en fonction de e et des composantes de $\vec{p}$.

2°/ Une réaction entre particules élémentaires consiste à préparer un certain nombres de particules (deux en pratique) dans un état initial (énergies e_n, impulsions $\vec{p}_n$) et à observer les particules finalement obtenues (énergies e_m, impulsions $\vec{p}_m$).

a) Soit les quantités $E_i \hat{=} \sum_n e_n$ et $\vec{P}_i \hat{=} \sum_n \vec{p}_n$, baptisées respectivement énergie et impulsion totales de l'état initial du système. Comment s'expriment, en fonction de celles-ci les quantités correspondantes calculées par Colin dans un autre repère ?

b) Soit la quantité $M^2 \hat{=} E_i^2 - \vec{P}_i^{\,2}$ associée, par Chloé, à l'état initial. Que pouvez vous dire de la quantité correspondante $E_i'^2 - \vec{P}_i'^2$ associée par Colin à cet état initial ? M est appelée la masse invariante du système.

c) Chloé croit (et elle n'est pas la seule) à la conservation de l'énergie et de l'impulsion totales d'un système isolé. Qu'en concluez-vous en ce qui concerne la valeur de la quantité $E_f^2 - \vec{P}_f^{\,2}$ associée à l'état final du système ? Récapitulez les propriétés de M.

d) Vous subodorez la possibilité de produire une particule encore jamais vue, le π^0 de masse $m_{\pi^0} = 135$ MeV, en envoyant un proton (masse $m_p = 938$ MeV), d'énergie e_p, sur un proton immobile, pour provoquer la réaction $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$. Le problème est de déterminer les spécifications du nouvel accélérateur de protons qu'il va falloir construire pour tenter de réaliser cette réaction de production de pion.

α) Calculez la masse invariante M^2 du système dans le cas minimal où, dans un repère, les deux protons et le π^0 seraient produits juste au repos (pas d'énergies cinétiques).

β) Calculez la même masse invariante de ce processus en fonction de l'énergie e_p du proton incident, dans le laboratoire.

γ) En déduire la valeur minimale d'énergie qu'il faut donner au proton incident, dans le laboratoire, pour avoir une chance de produire un π^0.

Extraits de l'examen de juin 1989 :

6. Space opera (3,5+2 points)

Sans vouloir remettre en cause la relativité einsteinienne fondée sur la transformation de Lorentz et qui, contrairement à la relativité galiléenne, n'est en désaccord avec aucune expérience, on a parfois envisagé l'existence, tout à fait hypothétique, de particules appelées "tachyons" dont la vitesse est supérieure à 1. On va en imaginer quelques conséquences, indépendamment de toute considération psychologique, par des expériences réalisées à l'aide de robots programmés.

Les robots R2D2 et C3P0, équipés du même modèle d'horloge, ont une vitesse relative de module $v = 3/5$. Ils sont convenus d'adopter comme origine d'espace et de temps l'événement constitué par leur séparation, et ils communiquent par échanges de tachyons émis avec la vitesse $V = 7$ (par rapport à leur émetteur). R2D2 adopte un axe $\hat{x}$ suivant la vitesse de C3P0 et repère tout événement par des coordonnées t, x, y, z. C3P0 adopte un axe $\hat{x}'$ opposé à la vitesse de R2D2 et des axes $\hat{y}'$ et $\hat{z}'$ parallèles aux axes $\hat{y}$ et $\hat{z}$ de R2D2; il repère tout événement par les coordonnées t', x', y', z'.

1) Prologue.

a*)(0,5 pt.) Représentez les lignes d'univers de R2D2 et de C3P0 sur un graphe d'espace-temps dans le repère de R2D2.

b*)(0,75 pt.) Quelles valeurs des coordonnées t', x', y', z' C3P0 attribue-t-il à un événement, en fonction des valeurs de t, x, y, z attribuées par R2D2 au même événement?

2) Expérience 1. R2D2 est programmé pour émettre un tachyon, en direction de C3P0, lorsque son horloge indique 32 jours (événement A). C3P0 est programmé pour enregistrer l'instant de réception de ce tachyon (événement B) d'après son horloge.

a*)(0,5 pt.) Représentez cette histoire (lignes d'univers de R2D2, de C3P0 et du tachyon, événements A et B) sur un graphe d'espace-temps dans le repère de R2D2 (échelle 1 cm. sur le graphe pour 5 jours dans l'espace-temps).

b*)(0,5 pt.) Calculez la date t_{B} et la position x_{B} de la réception.

c*)(0,5 pt.) Calculez les dates t'_{A} et t'_{B} attribuées aux mêmes événements par C3P0.

d*)(0,75 pt.) Représentez la même histoire sur un graphe d'espace-temps (à la même échelle) dans le repère de C3P0.

e)(0,25 pt.) Quelle que soit l'étrangeté de cette expérience, voyez-vous une impossibilité logique à programmer ainsi les robots?

3) Expérience 2. On reprend le programme précédent mais, en plus, C3P0 a pour instruction d'émettre (événement C) un tachyon (vitesse $V = 7$), en direction de R2D2, 4 jours après réception d'un tachyon. R2D2 est également chargé d'enregistrer la date de réception (événement D) du tachyon.

a)(0,5 pt.) Calculez les instants t'_{C} et t'_{D}, et représentez toute cette histoire (lignes d'univers et événements A, B, C et D) sur un graphe d'espace-temps (à l'échelle) dans le repère de C3P0.

b)(0,25 pt.) Voyez-vous une impossibilité logique à programmer cette expérience?

c)(0,5 pt.) Quel est l'ordre temporel des événements A et D? Cet ordre est-il le même dans tous les repères?

4)(0,5 pt.) Expérience 3. On modifie légérement le programme de l'expérience 2. R2D2 a maintenant pour instruction de n'émettre un tachyon *que s'il n'a rien reçu* auparavant. Un tel programme est-il logiquement cohérent?

7. Encore une forme d'énergie (1+1,25 points)

1) Une particule de masse m est animée de la vitesse $\vec{v}$.

a*)(0,25 pt.) Quelle est l'expression de son énergie e ?

b*)(0,25 pt.) Quelle est l'expression de son impulsion $\vec{p}$?

c*)(0,25 pt.) Quelle est l'expression de la vitesse de la particule en fonction de son impulsion et de son énergie?

d*)(0,25 pt.) Quel invariant pouvez-vous former avec l'énergie et l'impulsion de la particule?

2) Un atome de masse M_{i}, au repos, émet une particule (dite γ) d'énergie e_γ et qui, aussi étonnant que cela puisse paraître, a une vitesse égale à 1 (à la précision près de la mesure que l'on peut en faire).

a)(0,25 pt.) Quel est le module p_γ de l'impulsion du gamma?

b)(0,25 pt.) Quelle est l'énergie finale e_{f} de l'atome?

c)(0,25 pt.) Quel est le module p_{f} de l'impulsion finale de l'atome?

d)(0,5 pt.) En déduire la masse finale M_{f} de l'atome.

(4) Durée de vie des muons

1°/ $e = \gamma m \Rightarrow \gamma = \frac{e}{m} = \frac{176}{106} = 1{,}66.. = \frac{5}{3}$

2°/ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \Rightarrow 1 - v^2 = \frac{1}{\gamma^2}$

$$v^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow v = \frac{4}{5}$$

3°/ $\Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta\tau^2$

$$\Delta t \sqrt{1-v^2} = \Delta\tau \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma\, \Delta\tau = \frac{5}{3}\, 2{,}2 \cdot 10^{-6} = 3{,}7 \cdot 10^{-6}\, s.$$

4°/ $\Delta x = v\,\Delta t = 2{,}9\ 10^{-6}\, s. = 3 \cdot 10^8\ 2{,}9\ 10^{-6} = 880\ m.$

---

(5) Masse invariante

1°/ $e^2 - \vec{p}^{\,2} = \gamma^2 m^2 - \gamma^2 m^2 v^2$

$$= m^2\ \gamma^2 (1 - v^2) = m^2$$

$e'^2 - \vec{p}'^{\,2} = \gamma'^2 m^2 - \gamma'^2 m^2 v'^2 = m^2$ invariant

$$\begin{cases} e = \gamma m = m \frac{dt}{d\tau} \\ \vec{p} = \gamma m \vec{v} = m \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} e' = m \frac{dt'}{d\tau} = m \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \left\{ \frac{dt}{d\tau} - V \frac{dx}{d\tau} \right\} = \gamma\,(e - V p_x) \\ p'_x = m \frac{dx'}{d\tau} = m \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \left\{ \frac{dx}{d\tau} - V \frac{dt}{d\tau} \right\} = \gamma\,(p_x - V e) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases}$$

2°/ a) $E'_{init} = \sum_n e'_n = \sum_n \gamma\,(e_n - V p_{n x}) = \gamma\,(E_{init} - V P_{init_x})$

$$P'_{init_x} = \sum_n p'_{n x} = \sum_n \gamma\,(p_{n x} - V e) = \gamma\,(P_{init_x} - V \cdot E_{init})$$

b) $M^2 \hat{=} E_{init}^2 - \vec{P}_{init}^2$

$$E'^2_{init} - \vec{P}'^2_{init} = \gamma^2 (E_{init} - V P_{init_x})^2 - \gamma^2 (P_{init_x} - V E_{init})^2 - P_{init_y}^2 - P_{init_z}^2$$

$$= \gamma^2 \left(E_{init}^2 - 2V E_{in} P_{inx} + V^2 P_{inx}^2 - V^2 E_{in}^2 + 2V E_{in} P_{inx} - P_{inx}^2 \right) - P_{iny}^2 - P_{inz}^2$$

$$= E_{in}^2 - \vec{P}_{in}^2 = M^2$$