Paris 7
PH282
2001–02

HYDRODYNAMIQUE

Exercices, feuille 10
Diffusion, couche limite laminaire

---

1 **Diffusion**
Un vent chaud, à 19°C, se met à souffler sur un sol de diffusivité $\kappa \approx 7 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$ qui était en équilibre à 15°C. Estimez les temps auxquels le sol atteindrait la température de 18,6°C aux profondeurs 1 cm et 1 m (si ce vent continuait à souffler imperturbablement), à l'aide du tableau de quelques valeurs intéressantes de la fonction erreur,

$$\mathrm{erf}\,\alpha \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha d\beta\, e^{-\beta^2},$$

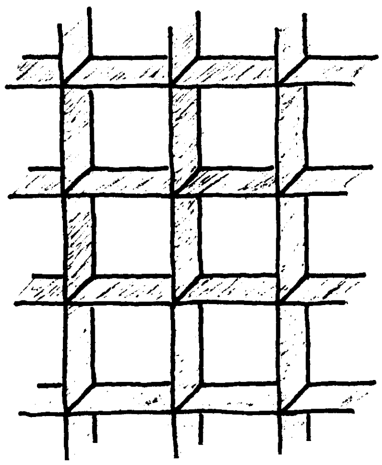
erf α	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
α	0,0089	0,045	0,09	0,18	0,27	0,37	0,48	0,60	0,73	0,91	1,16	1,32	1,82

---

2 **Un peu théorique, mais bonne base**
Une très grande quantité (en hauteur autant qu'en étendue) de fluide newtonien repose (tant bien que mal) sur un fond horizontal (est-ce bien important ?) agité d'un mouvement périodique sinusoïdal et tout aussi horizontal, seule cause du mouvement du fluide.
Déterminez les champs de vitesse et de vorticité du fluide.
Pour fixer(!) les idées : cas du fond de l'eau, viscosité cinématique $\approx 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, agité à 1 Hertz. Et pour de l'air (viscosité 15 fois plus grande) ? Et à 100 Hertz ? Et pour un mouvement périodique quelconque ?

---

3 **Couche limite laminaire et perte de charge**
Une grille constituée de lames de tôle mince, largeur 2 cm, disposées en cellules carrées, côté 2 cm, est placée dans une conduite où circule de l'air à la vitesse de $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.



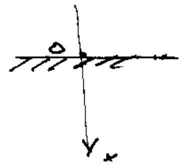
1. Vous semble-t-il justifié, et pourquoi, de supposer que la couche limite est laminaire ?

2. Estimer l'épaisseur de la couche limite à l'extrémité aval d'une lame.

3. Estimer la traînée sur une face d'une lame, puis sur les faces d'une cellule carrée.

4. Estimer la différence de pression entre l'amont et l'aval de la grille. En déduire la perte de charge induite par la grille.

Feuille 10, ex 1 — **Diffusion**



$$\vartheta(x,t) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_1 - T_0}$$

$$\vartheta(x,t) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) = \frac{18{,}6 - 15}{19 - 15} = \frac{3{,}6}{4} = 0{,}9$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) = 0{,}1$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} = 0{,}09$$

$$t = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{x}{0{,}18}\right)^2$$

$x = 1$ cm $\Longrightarrow$ $t = \dfrac{1}{7 \times 10^{-7}} \left(\dfrac{10^{-2}}{0{,}18}\right)^2 = 4{,}4 \times 10^3$ s

$= 4\,400$ s

$= 1$ h 13 mn. $\simeq 1{,}2$ h.

$x = 1$ m $= 100$ cm

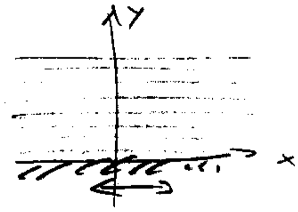
$$\frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{10^2 x}{\sqrt{10^4 t}} \quad \Rightarrow \quad t = 4{,}4 \times 10^7 \text{ s.}$$

$= 1{,}2 \times 10^4$ h

$= \dfrac{120 \times 10^2}{24} = 500$ j.

ya pu d'saisons !

Feuille 10, ex 2



Idée : $\vec{v} = \hat{x}\, v(y,t)$?

N-S : $$\partial_t v = -\frac{1}{\rho}\partial_x \hat{p} + \nu\, \partial_y^2 v$$
$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho}\partial_y \hat{p} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\partial_z \hat{p} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \hat{p}(x,t)$$

invar / transl $\hat{x}$ $\quad \hat{p}(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t v = \nu\, \partial_y^2 v \\ v(0,t) = V \cos\omega t = \omega X \cos\omega t \end{cases}$$

Idée : Sol. auto semblable $v(y,t) = f\left(u = \frac{y}{\sqrt{\kappa t}}\right)$?

$y = 0 \Rightarrow f(0) = V\cos\omega t \quad \forall t$

impossible (sauf $V = 0$), cond. inhomogène

Idée : $v(y,t) = f(y)\cos\omega t$?

+ pratique $v(y,t) = \mathcal{R}e\left\{ f(y)\, e^{i\omega t} \right\}$

$$i\omega f(y) = \nu f''(y)$$
$$f'' = i\frac{\omega}{\nu} f$$
$$f(y) = e^{\pm\sqrt{i\frac{\omega}{\nu}}\, y} = e^{\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, y}$$

décroissante (dissipation) [sinon $v(y,t) \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$!!]

$$f(y) = A\, e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y} = A\, e^{-\frac{y}{\delta}} e^{-i\frac{y}{\delta}} \qquad \delta \hat{=} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

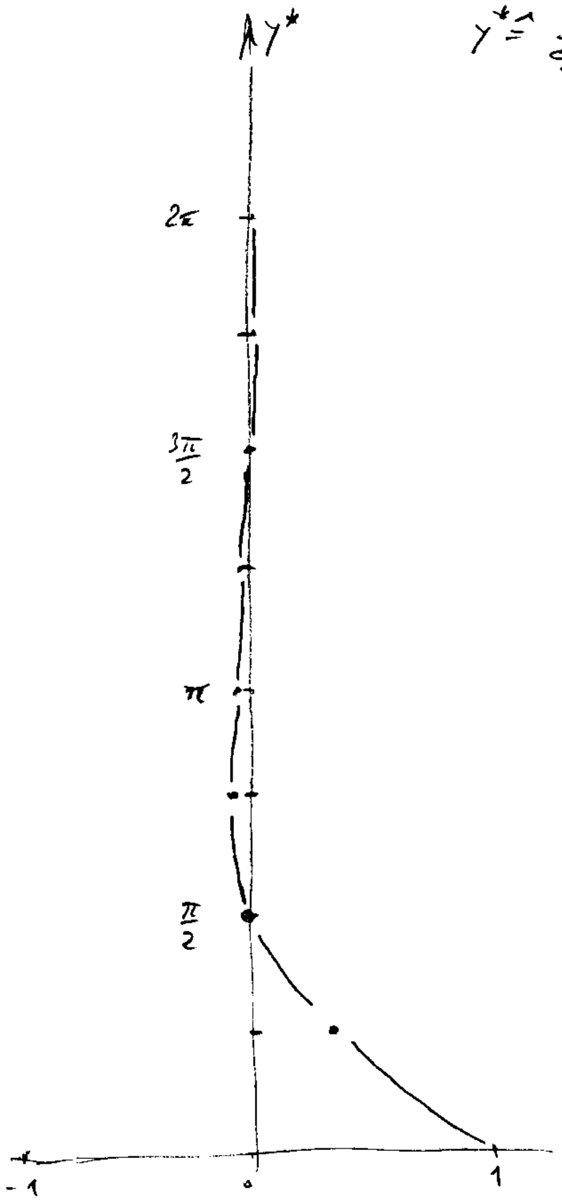
$$v(y,t) = A\, e^{-\frac{y}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)$$

$$v(0,t) = V\cos\omega t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v(y,t) = \underbrace{V}_{\omega X}\, e^{-\frac{y}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)}$$

$\vec{\omega} = \hat{z}\, \omega(y,t)$ avec $\omega(y,t) = -\partial_y v$

$$\omega(y,t) = -\mathcal{R}e\left\{ \partial_y V e^{-(1+i)\frac{y}{\delta}} e^{i\omega t} \right\}$$
$$= V\, \mathcal{R}e\left\{ \frac{1+i}{\delta} e^{-(1+i)\frac{y}{\delta}} e^{i\omega t} \right\}$$
$$= \sqrt{2}\frac{V}{\delta}\, \mathcal{R}e\left\{ e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{y}{\delta}} e^{-i\frac{y}{\delta}} e^{i\omega t} \right\}$$

$$\boxed{\omega(y,t) = \underbrace{\sqrt{2}\frac{V}{\delta}}_{\sqrt{\frac{\omega^3 X^2}{\nu}}}\, e^{-\frac{y}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)}$$



$y^* \hat{=} \frac{y}{\delta}$

y^*	$v \propto e^{-y^*} \cos y^*$	$\omega \propto e^{-y^*}(\cos y^* + \sin y^*)$
0	1	
$\pi/4$	0,322	
$\pi/2$	0	
$3\pi/4$	−0,067	
π	−0,0432	
$5\pi/4$	−0,0139	
$3\pi/2$	0	
$7\pi/4$	0,0029	
2π	0,0019	

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

eau $\begin{cases} \nu = 10^{-6}\ m^2 s^{-1} \\ \omega = 2\pi F = 2\pi\ rd\,s^{-1} \end{cases}$

air $\nu = 15 \times 10^{-6}\ m^2 s^{-1}$

$\delta = \sqrt{\frac{10^{-6}}{\pi}} = 5{,}6 \times 10^{-4}\,m = 0{,}56$ mm.

1er zéro à $\frac{\pi}{2}\delta = 0{,}9$ mm.

$\delta = 0{,}56 \times \sqrt{15} = 2{,}2$ mm

ça porte + loin, car air plus visqueux et il n'y a que la viscosité pour propager une onde transverse (de cisaillement)

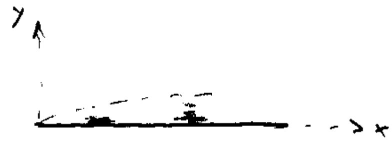
eau, à 100 Hz : $\delta = \frac{0{,}56}{10} = 6 \times 10^{-2}$ mm. à hte fréquence ça porte moins

Mvt. périodique quelconque. $X(t) = \sum_{n=1} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

y a que la fondamentale qui se propage quelque peu..

Feuille 10, ex 3 — Couche limite



écoulement plan :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \Delta\omega$$

Diffusion : $\partial_t \omega = \nu \partial_y^2 \omega$, $\frac{\nu t}{y^2}$ sans dim.

longueur de diffusion $\delta = \sqrt{\nu t}$

Transport : $x = Vt$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{\nu x}{V}} , \quad \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{\nu}{Vx}} = \frac{1}{\sqrt{Re(x)}}$$

(1) $Re(L_x) = \frac{V L_x}{\nu} = \frac{30 \times 2\times 10^{-2}}{15\times 10^{-6}} = 4\cdot 10^4 << 5\times 10^5$

c'est tout laminaire

(2) $\delta(L_x) = \frac{L_x}{\sqrt{Re(L_x)}} = \frac{2\times 10^{-2}}{\sqrt{4\times 10^4}} = 10^{-4}\ m = 0{,}1\ mm$

(3) Traînée sur une face d'une lame :

$$d^2F_x = dx\, dz\, \mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$dF_x \approx dx\, L_z\, \rho\nu \frac{V}{\delta} = L_z\, dx\, \rho \nu V \sqrt{\frac{V}{\nu x}} = L_z \rho \nu^{1/2} V^{3/2} x^{-1/2} dx$$

$$F_x \approx L_z\rho\nu^{1/2}V^{3/2}\, 2 L_x^{1/2} = L_x L_z\, 2\rho\left(\frac{\nu V^3}{L_x}\right)^{1/2} = L_x L_z\, 2 \left(\frac{\nu}{VL_x}\right)^{1/2}\rho V^2$$

$$\boxed{F_x \approx L_x L_z \frac{4}{\sqrt{Re(L_x)}}\, \frac12 \rho V^2} = (2\times10^{-2})^2 \frac{4}{\sqrt{4\times10^4}}\, \frac12\, 1{,}2 \times (30)^2$$

$$= 4{,}3\times 10^{-3}\ N \simeq 0{,}4\ gf$$

Cellule : $F_x = 4 f_x \approx 1{,}7\ 10^{-2}\ N$

(4) Débit $\Rightarrow$ vitesse conservée

Friction F_x à vaincre par le fluide,
fournie par la différence de pression

$$\Delta p = \frac{F_x}{L_y L_z} \approx \frac{1{,}7\times10^{-2}}{(2\times10^{-2})^2} = 43\ Pa$$

Bernoulli : $\frac12\rho \cancel{V_1^2} + p_1 + \rho g \cancel{z_1} = \frac12 \rho\cancel{V_2^2} + p_2 + \rho g\cancel{z_2} + C$

(en supposant uniformité dans la section !)

Perte de charge dans une cellule :

$$C = p_1 - p_2 = \frac{F_x}{L_yL_z} \approx \frac{16}{\sqrt{Re(L_x)}}\, \frac12\rho V^2 = \frac{16}{\sqrt{4\times10^4}}\, \frac12\, 1{,}3\ \ 30^2$$

$$\approx 47\ Pa$$