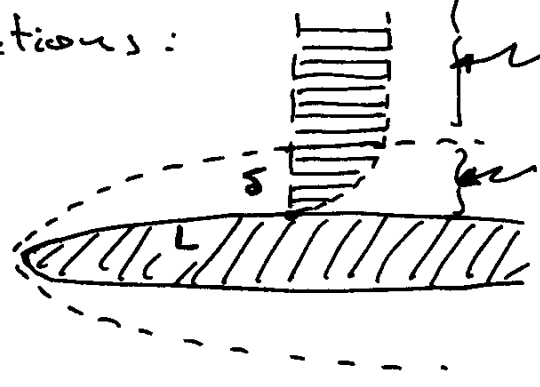


COUCHE LIMITE

Raoult (1904)
 Analyse théorique:
 Facile gradient Euler
 simple (3 tas de méthodes)
 fort gradient Euler Stokes
 gta vitesses Navier-Stokes
 compliqué, 2 long caract.
 sauf si $\delta \ll L$
 → couche limite laminaire

Observations :

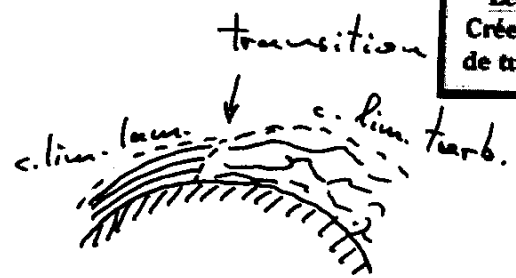
V →



Ensuite, en aval :



ou



Leçon n°27
 Créer une zone de turbulences.

meilleure alignement par rapport de la décollet diminue le sillage et la traînée

Couche limite laminaire : plusieurs niveaux d'analyse, ex bi dim permanent

Pas de diffusion de vorticité'



s'accumulent cisaille vorticité $\omega \neq 0$

apparue au bord d'attaque alimentée par le paroi

diffusée : $\delta \propto \sqrt{\nu t}$
 transportée : $x \propto \sqrt{\nu t}$

→ $\delta \propto \sqrt{\frac{\nu x}{V}}$

$\frac{\delta}{x} \propto \frac{1}{\sqrt{Re_x(x)}}$

avec $Re(x) \triangleq \frac{Vx}{\nu}$

Empiriquement bon tant que $1 \ll Re(x) \ll 5 \cdot 10^5$
 sinon régime Stokes transition c. lim. lam. → turbulente

Exemples:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{eau} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \\ \nu_{air} = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \end{array} \right.$$

1) $L = 1 \text{ m}$, $V = 1 \text{ m s}^{-1}$ ($\approx 3,6 \text{ km h}^{-1}$), $Re(L) = \frac{VL}{\nu}$

eau $Re(L) = 10^6$ limite transition \rightarrow turbulente

$$\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{Re(L)}} = 10^{-3}, \quad \delta(L) \approx 1 \text{ mm}$$

air $Re(L) = 7 \times 10^4$ c'est bien laminaire

$$\frac{\delta}{L} \approx 4 \times 10^{-3}, \quad \delta(L) \approx 4 \text{ mm}$$

\Rightarrow avion en papier entièrement laminaire

2) Transition c.lim. lam. \rightarrow turbulente?

Planche (2 voiles): $V = 10 \text{ m s}^{-1}$

$$Re_{crit} = 10^6 \Rightarrow L_{cr} = Re_{cr} \frac{\nu}{V} = 10^{-1} \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

$$\delta_{cr} = \frac{L_{cr}}{\sqrt{Re_{cr}}} = 10^{-4} \text{ m} = 0,1 \text{ mm}$$

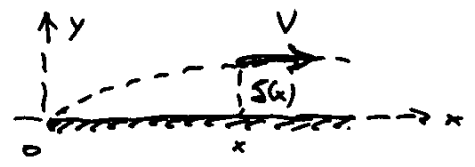
Airbus: $V = 200 \text{ m s}^{-1}$

$$L_{cr} = 7,5 \text{ cm}$$

$$\delta_{cr} = 7,5 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

\approx entièrement turbulent (avantageux, recul du pt. de décollement)

3) Traînée de friction sur une plaque plane (1 face)



$$\delta(x) \approx \sqrt{\frac{\nu x}{V}}$$

$$d^2 F_x \approx dz dx \rho \frac{V}{\delta(x)}$$

$$dF_x = L_z \rho \frac{V^{3/2}}{\nu^{1/2}} x^{-1/2} dx$$

$$F_x = L_z \rho \nu^{1/2} V^{3/2} 2 x^{1/2} \Big|_0^{L_x}$$

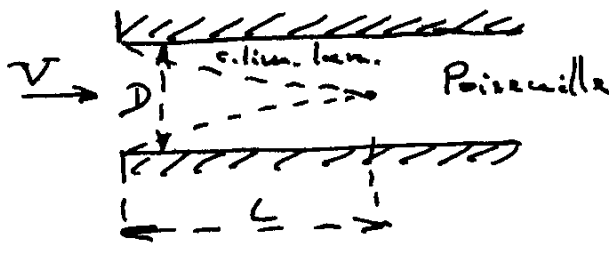
si entièrement laminaire, jusqu'à L_x

$$\frac{F_x}{L_z} = 2 \rho \nu^{1/2} V^{3/2} L_x^{1/2}$$

$$\frac{F_x}{L_x L_z} = 2 \rho V^2 \left(\frac{\nu}{VL_x} \right)^{1/2} = \frac{4}{\sqrt{Re(L_x)}} \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (1 \text{ face})$$

Attention, c'est pas l'effet dominant / traînée induite (tourbillons dans le sillage)
sauf à très bas Re , mais c'est plus de la couche limite (épaisseur $\rightarrow \infty$ régime de Stokes)

4) Distance d'établissement de l'écoulement de Poiseuille



$$\delta \approx D \sqrt{\frac{L}{\nu Re_{c.l.}}} \Rightarrow \frac{L}{D} = \sqrt{Re_{c.p.}}$$

2 nombres de Reynolds:

couche limite $Re_{c.l.} = \frac{V L}{\nu}$

Poiseuille $Re_P = \frac{V D}{\nu}$

$$Re_{c.l.} = \frac{L}{D} Re_P \Rightarrow \boxed{\frac{L}{D} \approx Re_P}$$

Exemple: eau $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
 tuyau $D = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$
 $V = 1 \text{ cm s}^{-1} = 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$

$$Re_P = 10^2 < 2000 \Rightarrow \text{Poiseuille}$$

$$L \approx 10^2 \times 10^{-2} = 1 \text{ m}$$

5) Sur paroi courbe, pas grand chose de change' tant que $\delta \ll$ rayon de courbure, avec en plus un gradient de pression transversal pour courber les lignes de courant

$$\frac{dp}{dn} = \rho \frac{v^2}{R_{courb.}}$$

6) Sur paroi plane, $R_{courb.} \gg \delta$,

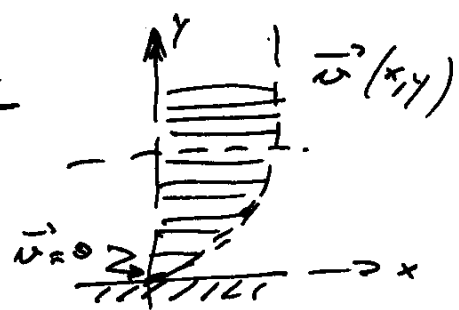


écoulement \approx parallèle, pas d'accél. // \hat{x}
 $\frac{dp}{dy} \approx 0$

La pression ne varie pas dans la traversée de la couche limite.

Equations de la couche limite

en incompressible,
stationnaire,
bi-dim.
sur plaque plane



si une zone où u_x dépend } fortement de y
I d'axe: } peu de x

$$|\partial_x u_x| \ll |\partial_y u_x|$$

$$\text{typ } \frac{V}{L} \ll \frac{V}{\delta} \Rightarrow \delta \ll L$$

Incompressibilité:
dans la couche lim.

$$\underbrace{\partial_x u_x}_{\frac{V}{L}} + \underbrace{\partial_y u_y}_{\frac{u_y}{\delta}} = 0 \Rightarrow u_y \leq \frac{\delta}{L} V$$

Navier - Stokes:

$$\underbrace{\partial_t \vec{v}}_{=0} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \partial_x p = \rho \{ \nu \Delta - (\vec{v} \cdot \nabla) \} u_x \leftarrow V \\ \partial_y p = \dots \dots \dots u_y \leftarrow \frac{\delta}{L} V \end{cases}$$

même opérateur

$$\Rightarrow \partial_y p \neq \frac{\delta}{L} \partial_x p$$

\Rightarrow à la fin pratique

$\partial_y p = 0$

sur on le savait pas encore

La pression ne varie pas dans la traversée de la couche limite

\Rightarrow la pression sur la paroi est donnée par l'écoulement extérieur à la couche limite (Euler, Bernoulli, ...)

Fondamental,
justifie les prises de pression statique

Et après ? Navier-Stokes sur \hat{x} :
dans la couche limite

$$\underbrace{\left(\underbrace{v_x}_{\frac{V}{L}} \frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{v_y}_{\frac{V\delta}{L}} \frac{\partial}{\partial y} \right)}_{\frac{V}{L}} v_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}_{\frac{1}{L^2} \ll \frac{1}{\delta^2}} v_x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{v \cdot \nabla \right)}{\frac{V}{L}}}_{\frac{V^2}{L}} v_x \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\frac{1}{\delta^2} V}}_{\frac{V}{\delta^2}}$$

Alors :
effets de viscosité faibles dans l'écoulement en général
(sinon, équation de Stokes, couche lim \rightarrow ca, autre type d'approximation qui marche très bien)
sauf dans la couche limite
(sinon ya plus de couche limite ?!)

\Rightarrow dans la couche limite :

terme d'inertie \approx terme de viscosité'

$$\frac{V^2}{L} \approx \nu \frac{V}{\delta^2}$$

$$\boxed{\delta \approx \sqrt{\frac{\nu L}{V}}}$$

$$\frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{\nu}{VL}} = \frac{1}{\sqrt{Re(L)}}$$

comme de bien entendu

Pour faire mieux, équations de la couche limite :

$$\boxed{\begin{aligned} (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}) v_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}} \quad \text{Prandtl}$$

$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$? \tilde{p} ne change pas à la traversée de la couche lim.

Hors couche limite, régime d'Euler permanent

\Rightarrow Bernoulli utilisable

Sur ligne de courant:

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + p = \text{cte}$$

↑ vitesse de l'écoulement primaire

$$\rho V(s) \frac{dV}{ds} + \frac{dp}{ds} = 0$$

⇒ eq. de la couche limite:

$$(v_x \partial_x + v_y \partial_y) v_x - \nu \partial_y^2 v_x = V(s) \frac{dV}{ds}$$

Cas d'une plaque fine demi-infinie,
ligne de courant \approx rectiligne, $V = \text{cte}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (v_x \partial_x + v_y \partial_y) v_x = \nu \partial_y^2 v_x \\ \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0 \end{cases}$$

⇒ une équation non linéaire à une variable (Blasius),
facilement soluble numériquement. (Voir livres)

⇒ Force:

$$\frac{F}{L_x L_z} = \frac{1,328}{\sqrt{Re(L_x)}} \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (\text{sur une face})$$

Epilogue

- 1) Écoulement à basse vitesse V
et/ou petite taille L
et/ou fluide très visqueux ν

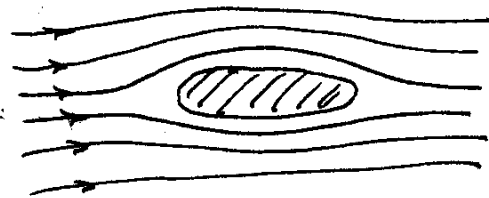
$$Re \ll 1$$

Navier Stokes \Rightarrow Stokes
(2^e ordre, linéaire)

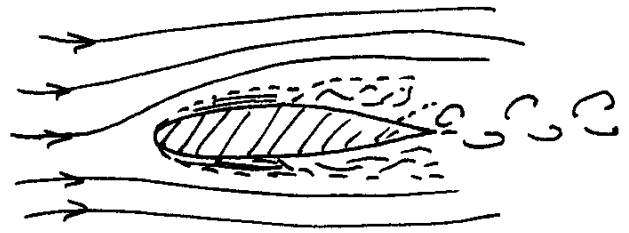
$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &\approx -\nabla p + \nu \Delta \vec{v} \\ &+ \text{condition de non glissement} \end{aligned} \right.$$

Soluble (!) exact = pour une sphère,

- 2) Approximations pour écoulements en couche mince
(autorise des Re plus élevés): lave, miel.



2) Ecoulement à grande vitesse
d/ou grande taille
et/ou fluide peu visqueux



$Re \gg 1$
Navier Stokes \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{épais de la couche limite} \\ + \text{ cond. de non glissement} \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Euler } \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \\ + \text{ cond. de raccordement} \\ \text{flanes (n'étanchéité)} \end{array} \right.$ (1^{er} ordre, non linéaire)

Pour Euler, équation dite du "fluide parfait",
3 tas de méthodes :

(absence de) vorticité conservée $\partial_x v_y - \partial_y v_x = 0$
 \Rightarrow on peut poser $\begin{cases} v_x = \partial_x \phi \\ v_y = \partial_y \phi \end{cases}$ $\phi = \text{potentiel}$

conservation du volume $\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0$
 \Rightarrow on peut aussi poser $\begin{cases} v_x = \partial_y \psi \\ v_y = -\partial_x \psi \end{cases}$ $\psi = \text{fonction de courant}$

&c.....
Là commence l'hydrodynamique...
(voir les bons livres)

Espoir :
introduction ambitieuse (établir l'éq. de Navier-Stokes)
réussie (?) (ne pas trop avoir dérogé au moins ceux que le sujet intéressait a priori)
 \rightarrow possibilité de lire les livres

Régrets :
trop formel (c'est tellement + facile)
pas assez physique (modèles microscopiques pour pression viscosité diffusion)