Paris 7
PH282
1998–99

# HYDRODYNAMIQUE

EXAMEN
Mardi 14 septembre, 12 h 45, $\Delta t = 3\,\mathrm{h}$

*Les calculettes sont autorisées, voire utiles.*
*Les exercices proposés sont des transpositions directes de ce qui a été traité en cours et en travaux dirigés. Les questions finales peuvent être plus difficiles, mais pas d'inquiétude irraisonnée : ce sont les réponses aux questions élémentaires qui rapporteront le plus de points et seraont suffisantes, et nécessaires, pour obtenir la moyenne.*
*Les informations ci-dessous sont là pour vous aider, éventuellement, mais pas du tout pour vous donner à penser que les réponses attendues seraient en quoi que ce soit compliquées.*

Dérivée matérielle :
$$\frac{Df}{Dt} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})f$$

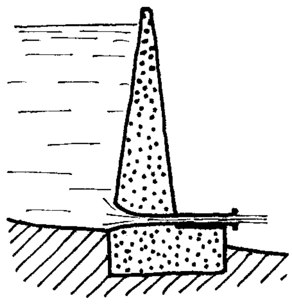
Équation de continuité :
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

Équation de Navier-Stokes :
$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p + \mathbf{g} + \nu\,\Delta\mathbf{v}$$

Équation de la vorticité :
$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu\Delta\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}$$

Tension de surface eau-air normale : $\gamma \approx 7{,}3\times10^{-2}\,\mathrm{J\,m^{-2}}$
Viscosité de l'air normal : $\nu \approx 1{,}5\times10^{-5}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$

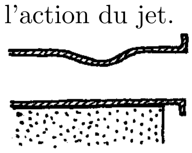
## I. APPROXIMATION INDUSTRIELLE



L'eau retenue par un barrage de montagne s'évacue par une conduite de 0,5 m de diamètre débouchant à l'air libre à 50 m sous la surface de la retenue.

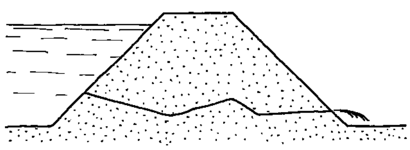
**1.** Estimez :
*i*) la vitesse de l'eau évacuée ;
*ii*) le débit volumique de l'eau ;
*iii*) le débit massique.

**2.** Le jet d'eau évacuée frappe une plaque plane disposée perpendiculairement au jet. Estimez la force supplémentaire qu'il faut exercer sur la plaque pour la maintenir immobile sous l'action du jet.

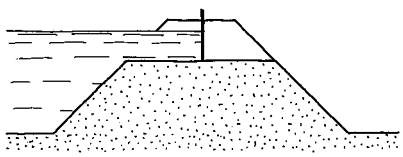


**3.** Suite à une chute de pierres la conduite d'évacuation se trouve cabossée. La section de la conduite est rétrécie de 5%. Estimez la pression de l'eau à cet endroit.

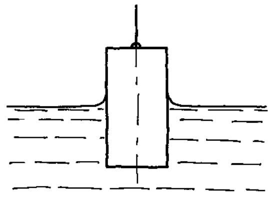
## II. HYDROSTATIQUE



**1.** Une fuite dans la digue d'un polder apparaît par un trou de 1 cm$^2$ à 1,5 m sous le niveau de la mer. Quelle force doit exercer avec son pouce le jeune et légendaire Hollandais qui découvre cette fuite pour s'opposer à l'irruption de la Mer du Nord dans le polder ?



**2.** La même digue comporte une ouverture rectangulaire de largeur 10 cm sur une profondeur de 50 cm. Quelle force (intensité, direction, position) doit exercer un Hollandais, pas trop jeune, pour maintenir en équilibre une plaque plane verticale qui obture l'ouverture ? Cet équilibre est-il stable ?



**3.** Une tige cylindrique, diamètre 1 cm, est suspendue verticalement, partiellement immergée dans l'eau à une profondeur de 1 cm.
*i*) Calculez la résultante des forces de pression (poussée d'Archimède) exercées par l'eau sur la tige.
*ii*) La tige est en verre bien propre que l'eau mouille parfaitement. Calculez la résultante des forces de tension superficielle exercées par l'eau sur la tige.

## III. CINÉMATIQUE

Soit le champ de vitesses

$$\begin{cases} v_x(x,y,z,t) = Ax \\ v_y(x,y,z,t) = By \\ v_z(x,y,z,t) = 0 \end{cases}$$

dans le domaine $x > 0$, $y$ et $z$ quelconques. La constante $A$ est négative ; la constante $B$ est *a priori* quelconque.

**1.** A quelle condition ce champ de vitesses décrit-il un écoulement incompressible ? Dans toute la suite on suppose cette condition satisfaite.

**2.** Déterminez les lignes de courant et représentez leur allure.

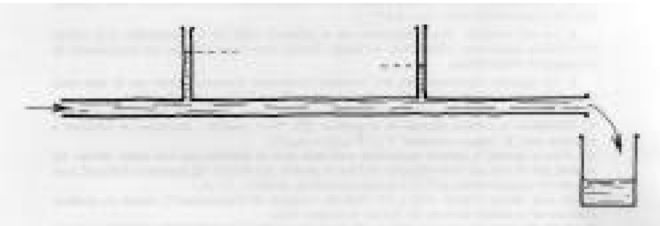
**3.** Ce champ de vitesses peut-il représenter l'écoulement en présence d'une paroi plane à préciser ? Dans quelle approximation ?

**4.** Calculez les composantes de l'accélération de la particule fluide qui se trouve en $(x, y, z)$.

**5.** Déterminez l'équation horaire $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ de la particule fluide qui se trouve en $(x_0, y_0, z_0)$ au temps $t_0 = 0$.

## IV. ÉCOULEMENT DE POISEUILLE

**1.** Rétablir, par la méthode que vous préférez, la loi de Poiseuille donnant le débit volumique dans un conduit cylindrique.



**2.** Un conduit cylindrique de diamètre intérieur 4 mm, disposé horizontalement, est équipé de deux tubes fins, transparents, verticaux, distants de 1 m.
Le conduit est alimenté par le réseau de distribution d'eau. En régime permanent, on observe que :
— la différence des niveaux dans les tubes verticaux est de 49 mm ;
— la boîte de 1 litre qui recueille l'eau à la sortie du conduit se remplit en 5 minutes 33 secondes.
*i*) Quelle est la valeur de la viscosité de l'eau alors prédite par la loi de Poiseuille ?
*ii*) Calculez le nombre de Reynolds de l'écoulement.
*iii*) L'utilisation de la loi de Poiseuille est-elle justifiée dans ce cas ?

## V. COUCHE LIMITE

**1.** Décrivez le phénomène de couche limite (faire un dessin).

**2.** Expliquez brièvement la théorie de Prandtl pour la couche limite laminaire :
— Comment estimer l'épaisseur de la couche limite ?
— Limite de validité ?
— Comment estimer la force de friction ?

**3.** Lors d'un avant-projet d'avion en papier du type aile volante rectangulaire, de longueur (envergure) 30 cm et largeur (corde) 10 cm, on envisage le cas où l'avion volerait à $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
*i*) Estimez l'épaisseur de la couche limite au bord arrière de l'aile (bord de fuite).
*ii*) Estimez la force de friction (traînée).
*iii*) Discutez la validité de vos estimations.

**I** ①

i) $\frac{1}{2}\rho v^2 + p_0 + 0 = 0 + p_0 + \rho g h$

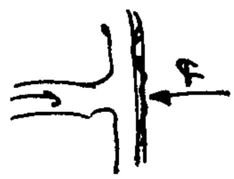
$$v^2 = 2 \cancel{\rho} g h$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 50} = 31{,}3 \text{ m s}^{-1}$$

ii) $\varphi_v = \pi R^2 V = \pi (0{,}25)^2\, 31{,}3 = 6{,}15 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (= 6{,}1 \times 10^3 \text{ l s}^{-1})$

iii) $\varphi_m = \rho \varphi_v = 10^3 \times 6{,}15 \text{ kg s}^{-1} \quad (= 6{,}1 \text{ t s}^{-1})$

②




$\Delta t \rightarrow \Delta P_x = \rho S V \Delta t V = \varphi_m V \Delta t$

$$F = 6{,}15 \times 10^3 \times 31{,}3 = 1{,}92 \times 10^5 \text{ N}$$

$$(= 19 \text{ t})$$

③ $\frac{1}{2}\rho V'^2 + p' = \frac{1}{2}\rho V^2 + p_0$

$$p' = p_0 - \frac{1}{2}\rho(V'^2 - V^2) = p_0 - \frac{1}{2}\rho V^2\left(\left(\frac{V'}{V}\right)^2 - 1\right)$$

$$= p_0 - \frac{1}{2}\rho V^2\left[\left(\frac{S}{S'}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 10^5 - \frac{1}{2}\, 10^3 \times (31{,}3)^2 \left[\left(\frac{1}{0{,}95}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 10^5 - 5{,}3 \times 10^4$$

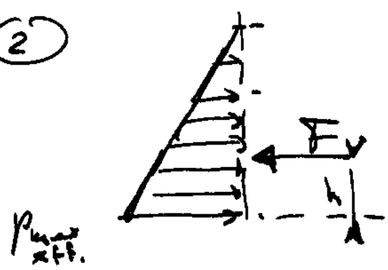
$(p' = p_0 - 0{,}5 \text{ atm})$

---

**II** ① $F = p_{eff} S = \rho g H S = 10^3\ 9{,}8\ 1{,}5\ (10^{-2})^2$

$$= 1{,}47 \text{ N} \quad (= 150 \text{ g})$$

②




$$p_{max\,eff.} = \rho g H = 10^3\ 9{,}8 \times 0{,}5 = 4{,}9 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$F = \frac{1}{2} p_{max} H L = \frac{1}{2} \times 4{,}9 \times 10^3 \times 0{,}5 \times 0{,}1$$

$$= 122 \text{ N} \quad (= 12 \text{ kg})$$

$$h = \frac{H}{3} = \frac{0{,}5}{3} = 0{,}167 \text{ m} \quad (= 17 \text{ cm})$$

instable

(3) i) $\uparrow \ A = \rho S h g = 10^3 \pi (5 \times 10^{-3})^2 10^{-2} \, 9{,}8$

$= 7{,}85 \times 10^{-4} \ N \ \left( = 7{,}8 \times 10^{-5} \ kg = 7{,}8 \times 10^{-2} \ g \right)$

ii) $\downarrow \ T = \gamma \, (\cancel{2}\pi D) = 7{,}3 \times 10^{-2} \pi \, 10^{-2}$

$= 2{,}29 \times 10^{-3} \ N \ \left( = 2{,}3 \times 10^{-4} \ kg = 0{,}23 \ g \right)$

---

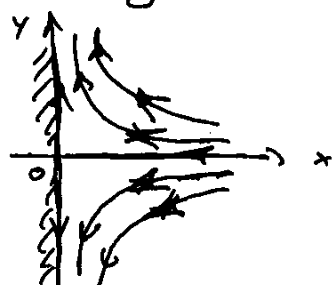
$\boxed{\text{III}}$ $\begin{cases} v_x = Ax \\ v_y = By \\ v_z = 0 \end{cases}$ $x > 0$ $A < 0$

(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = A + B = 0 \longrightarrow B = -A$

(2) l.d.c. $\dfrac{dx}{Ax} = \dfrac{dy}{-Ay} \longrightarrow \mathrm{Log}\,|x| = -\mathrm{Log}\,|y| + C$

$|x|\,|y| = C$

$|y| = \dfrac{C}{x}$



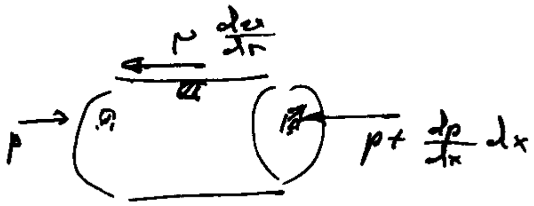

(3) plaque $x = 0$
cond. asympt.
pas très réaliste ($\neq \vec{v}$ uniforme quand $x \to \infty$)
seul$^{\text{t}}$ en régime Euler (hors couche limite, mais $v \to 0$ quand $x, y \to 0$)

(4) $\vec{a} = \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = A (x \partial_x - y \partial_y) \begin{cases} Ax \\ -Ay \\ 0 \end{cases} = A^2 \begin{cases} x \\ y \\ 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dot{X} = AX \\ \dot{Y} = -AY \\ \dot{Z} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} X(t) = x_0 \, e^{At} \\ Y(t) = y_0 \, e^{-At} \\ Z(t) = 0 \end{cases}$

# IV

(1)




$$\mu \frac{dv}{dr}\, 2\pi r\, dx = \frac{dp}{dx}\, dx\, \pi r^2$$

$$\underbrace{\frac{2\mu}{r}\frac{dv}{dr}}_{f(r)} = \underbrace{\frac{dp}{dx}}_{g(x)} = G \text{ cte.}$$

$$dv = \frac{G}{2\mu}\, r\, dr$$

$$0 - v(r) = \frac{G}{4\mu}(R^2 - r^2)$$

$$v(r) = -\frac{G}{4\mu}(R^2 - r^2)$$

$$\Phi_v = -\frac{G}{4\pi}\, 2\pi \underbrace{\int_0^R dr\, r (R^2 - r^2)}_{R^2\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} = \frac{R^4}{4}}$$

$$\boxed{\Phi_v = \frac{\pi}{8}\, \frac{-G}{\mu}\, R^4}$$

(2) i) $\cancel{\Delta p = \rho g h = 10^3 \times 9{,}8 \times 2{,}2 \times 10^{-2} = 216 \text{ Pa},\ |G| = 216 \text{ Pa m}^{-1}}$

$$\Phi_v = \frac{10^{-3}}{5\times 60 + 33} = 3 \times 10^{-6} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$$

$$\cancel{\mu = \frac{\pi}{8}\frac{|G|}{\Phi_v} R^4 = \frac{\pi}{8}\frac{216}{3\times 10^{-6}}(2\times 10^{-3})^4 = 4{,}5 \times 10^{-4}}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{4{,}5\times 10^{-4}}{10^3} = 4{,}5 \times 10^{-7}$$

$$\Delta p = \rho g h = 10^3 \times 9{,}8 \times 4{,}9 \times 10^{-2} = 480 \text{ Pa},\quad |G| = 480 \text{ Pa m}^{-1}$$

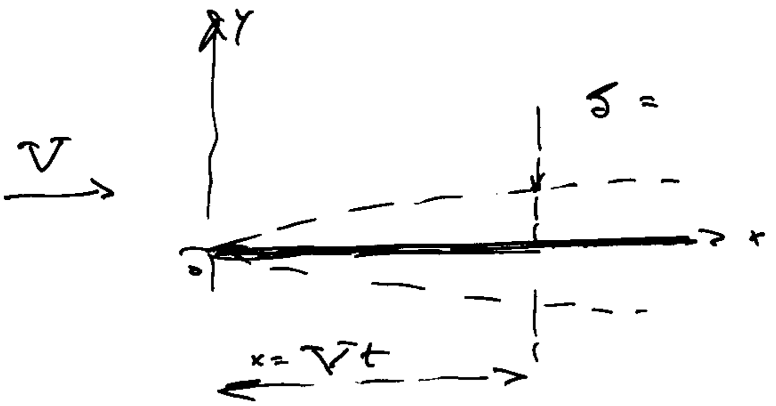
$$\mu = \frac{\pi}{8}\frac{|G|}{\Phi_v} R^4 = \frac{\pi}{8}\frac{480}{3\times 10^{-6}}(2\times 10^{-3})^4 = 1{,}01 \times 10^{-3}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 1{,}01 \times 10^{-6}$$

ii) $$\bar{V} = \frac{\Phi_v}{\pi R^2} = \frac{3\times 10^{-6}}{\pi (2\times 10^{-3})^2} = 0{,}24 \text{ m s}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_e \hat{=} \frac{\bar{V} R}{\nu} = \frac{0{,}24 \times 2\times 10^{-3}}{10^{-6}} = 480 < \mathcal{R}_{e_{cr}} \simeq 1000$$

iii) Régime de Poiseuille o.k.




$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \nu\Delta\vec{v}$$

$$[\nu] = L^2 T^{-1}$$

$$L^2 = [\nu]\, T \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu\Delta\vec{v} + \dots$$

$$\delta \sim \sqrt{\nu t}$$

$$\boxed{\delta(x) \sim \sqrt{\frac{\nu x}{V}}}$$

$$\left(\mathcal{R}_e < 5\times 10^5\right.$$

$$\mathcal{R}_e(x) \hat{=} \frac{Vx}{\nu}, \quad \delta(x) \sim x\,\mathcal{R}_e^{-1/2}(x)$$

$$\mathcal{R}_e(L) = \frac{VL}{\nu}, \quad \delta(L) \sim \sqrt{\frac{\nu L}{V}} = L\,\mathcal{R}_e^{-1/2}(L)$$

$$\partial_y v_x \sim \frac{V}{\delta(x)} = \left(\frac{V^3}{\nu x}\right)^{1/2}$$

$$\frac{d^2T}{dz\,dx} = \mu\,\partial_y v_x = \rho\,\nu\left(\frac{V^3}{\nu x}\right)^{1/2} = \rho\,\nu^{1/2}V^{3/2}x^{-1/2}$$

$$d^2T = dz\,\rho\,\nu^{1/2}V^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$dT = \ell\,\rho\,\nu^{1/2}V^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$T = \ell\,\rho\,\nu^{1/2}V^{3/2}\,2L^{1/2}$$

air naturel $\nu = 1{,}5\times10^{-5}\ m^2 s^{-1}$

---

$V = 10\ m\,s^{-1}$

$\mathcal{R}_e(L) = 10^5 \Rightarrow \quad L = \frac{\nu\,\mathcal{R}_e}{V} = \frac{1{,}5\times10^{-5}\times10^5}{10} = 0{,}15\ m$

$$\delta(L) = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e(L)}} = \frac{0{,}15}{\sqrt{10^5}} = \frac{1{,}5\times10^{-1}}{3\times10^2} = 0{,}5\times10^{-3}\ m$$

$$T = 1\times1{,}3\sqrt{1{,}5\times10^{-5}}\;10^{3/2}\;2\sqrt{15\times10^{-2}} \simeq 2{,}6\times\sqrt{1000}\;\sqrt{(15)^2\,10^{-8}}$$
$$\simeq 2{,}6\times30\times15\times10^{-4} = 2{,}6\times3\times\frac{3}{2}\times10^{-2} = 10^{-1}\ N = 10\ g$$

---

$V = 2\ m\,s^{-1}$

$\ell = 30\ cm$

$L = 10\ cm$

$$\mathcal{R}_e(L) = \frac{VL}{\nu} = \frac{2\times10^{-1}}{1{,}5\times10^{-5}} \gtrsim 2\times10^4$$

$$\delta(L) = \sqrt{\frac{1{,}5\times10^{-5}\times10^{-1}}{2}} = \sqrt{\frac{1{,}5}{2}}\;10^{-3} \lesssim 1\ mm$$

$$T = 0{,}3\times1{,}3\times\sqrt{1{,}5\times10^{-5}}\;2^{3/2}\;2\sqrt{0{,}1} = 3\times10^{-1}\times1{,}3\sqrt{1{,}5\times10^{-6}}\sqrt{32}$$
$$= 4\times10^{-1}\sqrt{48}\;10^{-3} \simeq 4\times7\times10^{-4} = 3\times10^{-3}\ N = 0{,}3\ g$$