Paris 7
PH314
2001–02

MÉCANIQUE DES MILIEUX DÉFORMABLES

Exercices, feuille 10
Cinématique, équation de Navier-Stokes

---

1 Écoulement cisaillé

On reprend le cas d'un fluide newtonien entre deux plaques "infinies" parallèles, entraîné par l'une des deux plaques qui glisse à vitesse constante.

1. Quelle est l'expression du champ des vitesses en régime permanent ?

2. Représentez les lignes de courant, les trajectoires.

3. La vorticité est définie par $\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{df}}{=} \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{v}$.

i) Quelle est l'expression du champ de vorticité de notre écoulement cisaillé ?
ii) Quelque part dans le fluide, on colore un petit segment parallèle à la vitesse. Que lui arrive-t-il ?
iii) Et si le petit segment coloré est normal aux plaques ?

---

2 Écoulement en "rotation solide"

On reprend l'histoire du seau d'eau en rotation à vitesse angulaire constante.

1. Quelle est l'expression du champ des vitesses en régime stationnaire ?

2. Quelle est la forme des lignes de courant, des trajectoires ?

3. Quelle est l'expression du champ de vorticité ?

4. Quelle est l'expression du champ des accélérations ? Calculez la dérivée matérielle du champ des vitesses.

---

3 Dérivée matérielle

Un écoulement est spécifié par son champ des vitesses $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. On considère la "particule fluide" qui à t est en $\mathbf{r}$.

1. Où se trouve cette particule à $t + \mathrm{d}t$? Quelle est alors sa vitesse.

2. En déduire l'accélération de la particule à t.

3. En déduire l'expression du champ $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ des accélérations de l'écoulement en terme de la dérivée matérielle du champ des vitesses.

---

4 Un écoulement tourbillonnaire

Avec le secret espoir qu'il puisse parfois ressembler à des situations réelles, on étudie le champ des vitesses

$$\begin{cases} v_r(r, \vartheta, z, t) = A/r, \\ v_\vartheta(r, \vartheta, z, t) = B/r, \\ v_z(r, \vartheta, z, t) = 0. \end{cases}$$

1. Est-ce le champ de vitesses d'un écoulement qui conserve la masse ?

2. Tracez l'allure des lignes de courant.

3. Déterminez l'expression du champ de vorticité.

4. Calculez le débit volumique de fluide à travers un caisson cylindrique de rayon R, hauteur H.

5. À quelle situation physique ce champ de vitesse pourrait-il éventuellement correspondre ?

5 Écoulement incompressible

Dans un écoulement $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, on suit l'évolution d'une quantité donnée de matière occupant, au fil du temps, le domaine spatial $\mathcal{V}(t)$.

1. Écrire, sous forme d'intégrale matérielle, l'expression du volume $V(t)$ de cette matière.

2. En déduire, grâce à la formule du transport de Reynolds, l'expression du taux de variation $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ de ce volume.

3. En déduire que la condition $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$, pour $(\mathbf{r},t) \in \mathcal{D}$ est nécessaire et suffisante pour que l'écoulement soit incompressible ($\rho =$ cte partout tout le temps dans $\mathcal{D}$) .

---

6 Navier-Stokes en écoulement unidimensionnel

On se demande ce que l'équation de Navier-Stokes peut nous dire sur l'écoulement "incompressible" d'un fluide dans un long tuyau rectiligne de section uniforme (contre exemples : trompette d'Aïda, coquille de spirorbe) ou entre deux grandes plaques parallèles. Etant donné la situation, on commence par s'interroger sur la possibilité qu'en tout point la vitesse du fluide ait la même direction (l'axe du tuyau, ou une parallèle aux plaques), disons : $\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = v(x,y,z,t)\,\hat{\mathbf{z}}$.

1. À quelle condition ce champ de vitesse décrit-il un écoulement incompressible ?

2. Calculer le terme d'inertie de l'équation de Navier-Stokes, et écrire chaque composante de l'équation de Navier-Stokes résultante.

3. Qu'en déduisez-vous en ce qui concerne le champ de pression "allégée" $\tilde{p}(\mathbf{r},t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} p(\mathbf{r},t) - \rho\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}$?

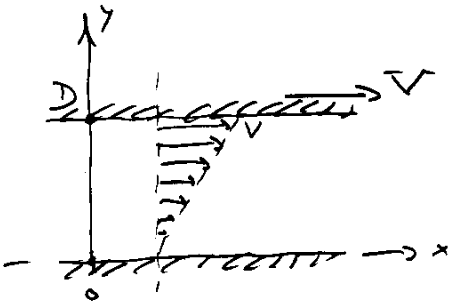
4. On s'interroge sur la possibilité d'un écoulement stationnaire (vitesses et pressions indépendantes du temps).
i) Montrez que le *gradient de pression* $G \stackrel{\mathrm{df}}{=} d\tilde{p}/dz$ doit alors être constant.
ii) En déduire l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire v.

5. Dans le cas d'un tuyau à section circulaire, il est tout indiqué d'adopter un système de coordonnées cylindriques et de s'interroger sur la possibilité d'une solution v qui ait la symétrie de révolution.
i) Calculer le laplacien d'une fonction ne dépendant que de $r = (x^2+y^2)^{1/2}$.
ii) Écrire l'équation différentielle que doit satisfaire v et trouver sa solution (écoulement de Poiseuille cylindrique), moyennant des hypothèses raisonnables (mais à vérifier par les conséquences expérimentales de toute cette modélisation) sur les valeurs de v au contact avec les parois, et sur l'axe, du tuyau.
iii) En déduire l'expression du débit en volume du tuyau (loi de Poiseuille).
iv) Cette expression est en très bon accord avec l'expérience, tant que le débit ne dépasse pas une certaine valeur. Qu'est-ce qui change dans la situation au-delà de cette valeur ; autrement dit, parmi les hypothèses qui ont conduit à la loi de Poiseuille, quelles sont celles qu'il faut abandonner ?

6. Dans le cas d'un écoulement entre deux plaques parallèles...
i) Déterminer, par la même démarche, le champ des vitesses. Tracer l'allure du profil des vitesses (écoulement de Poiseuille plan). Calculer le débit par unité de largeur.
ii) Quel est le champ des vitesses dans le cas ou l'une des plaques est animée d'une vitesse relative $\mathbf{V}$ constante, parallèle et opposée à la direction de l'écoulement ? Tracer l'allure du profil des vitesses.
iii) Quel est le champ des vitesses en cas de gradient de pression nul (écoulement de cisaillement, ou de Couette plan) si les plaques ont une vitesse relative $\mathbf{V}$. Tracer l'allure du profil des vitesses.

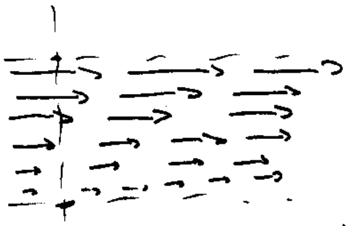
F 10, ex 1 — Écoulement cisaillé

(1)



$$\boxed{\vec{v} = \begin{cases} V\, y/D \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

(2)



écoulement permanent :
trajectoires = lignes de courant

Démo, pour écoulement $\vec{v}(\vec{r},t)$:

l. de courant à t : $\vec{r}(\lambda)$

$$\frac{dx}{v_x(\vec{r}(\lambda),t)} = \frac{dy}{v_y(\vec{r}(\lambda),t)} = \frac{dz}{v_z(\vec{r}(\lambda),t)} \xrightarrow{\text{stat}^{re}} \frac{dx}{v_x(\vec{r}(\lambda))} = \frac{dy}{v_y(\vec{r}(\lambda))} = \frac{dz}{v_z(\vec{r}(\lambda))}$$

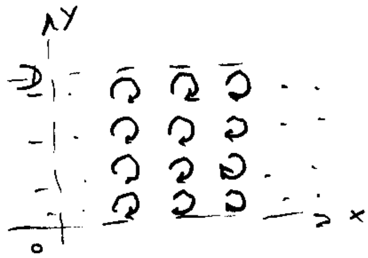
trajectoire d'une "particule" : $\vec{R}(t)$

$$\frac{dX}{v_x(\vec{R}(t),t)} = \frac{dY}{v_y(\vec{R}(t),t)} = \frac{dZ}{v_z(\vec{R}(t),t)} \xrightarrow{\text{stat}^{re}} \frac{dX}{v_x(\vec{R}(t))} = \frac{dY}{v_y(\vec{R}(t))} = \frac{dZ}{v_z(\vec{R}(t))}$$

même équa. diff.

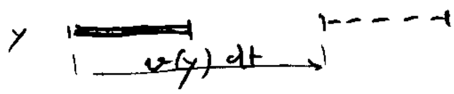
(3) $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$

i) $\boxed{\vec{\omega} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{V}{D} \end{vmatrix}}$ uniforme



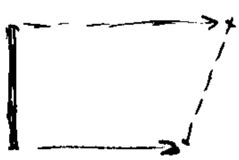
ii) Déplacement de

t à $t+dt$



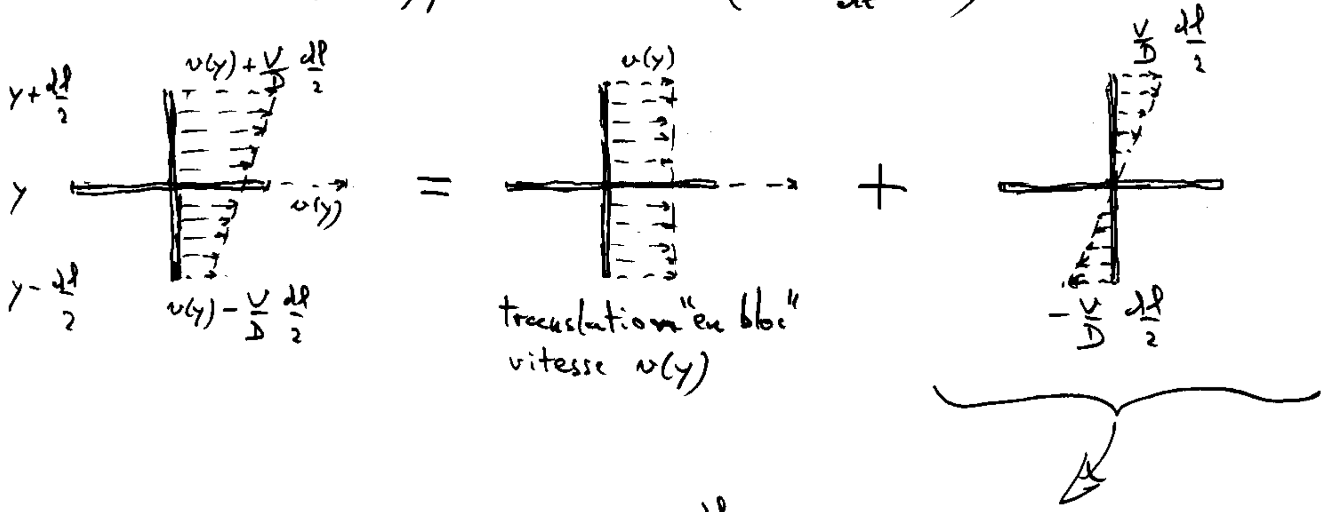
translation

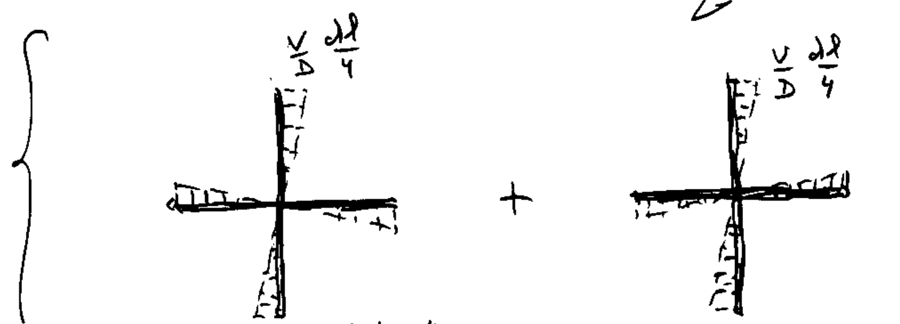
iii) t $t+dt$



translation + rotation + déformation

Encore mieux, pour les vitesses $\left(\frac{\text{déplacement}}{dt}\right)$:





rotation "en bloc"
taux

déformation

$$\Omega = \frac{-\frac{V}{D}\frac{dl}{4}}{dl/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{V}{D}$$

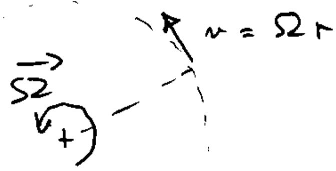
$$\Omega = \frac{1}{2}\,\omega$$

vorticité

F 10, ex 2

Rotation solide

(1)



$$\boxed{\vec{v}(r,\vartheta) = \hat{\vartheta}\, v(r)}$$

avec $\boxed{v(r) = \Omega r}$

(2) l. d. c. évident :

ou laborieusement :

$v_z = 0 \implies dz = 0 \implies$ plans

$v_r = 0 \implies dr = 0 \implies$ cercles

stationnaire $\implies$ traject. = l. d. c.

(3) $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\hat{r}\,\partial_r + \hat{\vartheta}\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta + \hat{z}\,\partial_z\right) \wedge \hat{\vartheta}\, v$

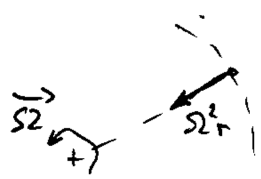
$= \hat{r} \wedge \Big[\underbrace{(\partial_r \hat{\vartheta})}_{=0} v + \hat{\vartheta}\,\partial_r v\Big] + \frac{1}{r}\,\hat{\vartheta} \wedge \Big[\underbrace{(\partial_\vartheta \hat{\vartheta})}_{=-\hat{r}} v + \hat{\vartheta}\,\underbrace{\partial_\vartheta v}_{=0}\Big]$

$= \hat{z}\left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r}\right) = \hat{z}\; 2\Omega$

$\boxed{\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}}$ comme prévu : $\underset{\substack{\text{rot. locale}\\ \text{en bloc}}}{\vec{\Omega}} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}$

ici globale uniforme

(4)



mvt. de rotation uniforme des bachelières

$\implies \boxed{\vec{a}(\vec{r}) = -\,\Omega^2\,\vec{r}}$

$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \left(\partial_t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}(\vec{r})$

$= v\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta\,(\hat{\vartheta}\,v) = \frac{v}{r}\Big[\underbrace{(\partial_\vartheta \hat{\vartheta})}_{-\hat{r}} v + \hat{\vartheta}\,\underbrace{\partial_\vartheta v}_{=0}\Big]$

$= -\,\frac{v^2}{r}\,\hat{r} = \boxed{-\,\Omega^2\,\vec{r}}$

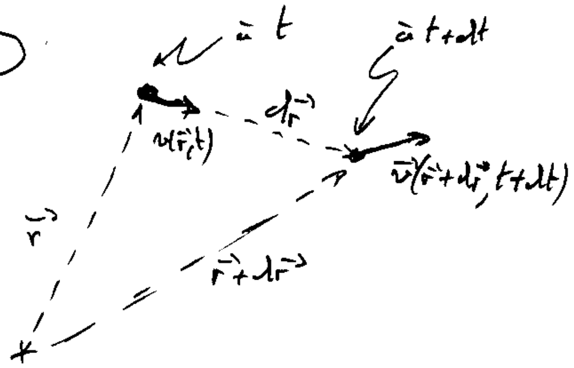
$= \vec{a}(\vec{r})$! (cf exo suivant)

F10, ex 3

Dérivée matérielle

$\vec{v}(\vec{r},t)$

(1)



à t, en $\vec{r}$, vitesse $\vec{v}(\vec{r},t)$

$\longrightarrow$ à $t+dt$, en $\vec{r}+\underbrace{\vec{v}(\vec{r},t)\,dt}_{\vec{dr}}$

vitesse $\vec{v}(\vec{r}+\vec{dr},t+dt)$

(2) $\vec{a}(\vec{r},t) \hat{=} \dfrac{\vec{v}(\vec{r}+\vec{dr},t+dt)-\vec{v}(\vec{r},t)}{dt}$ (en suivant la particule)

$$v_x(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt) = v_x(x,y,z,t) + (\partial_x v_x\,dx + \partial_y v_x\,dy + \partial_z v_x\,dz + \partial_t v_x\,dt)$$
$$= v_x(x,y,z,t) + dt\left[\frac{dx}{dt}\partial_x v_x + \frac{dy}{dt}\partial_y v_x + \frac{dz}{dt}\partial_z v_x + \partial_t v_x\right]$$
$$= v_x(x,y,z,t) + dt\left[\partial_t v_x + v_x\partial_x v_x + v_y\partial_y v_x + v_z\partial_z v_x\right]$$
$$= v_x(x,y,z,t) + dt\left[\partial_t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right]v_x$$

$$a_x = (\partial_t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,v_x$$

$$\boxed{\vec{a} = (\partial_t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v}}$$

(3) Vu en cours : dérivée matérielle $\dfrac{D}{Dt} \hat{=} \partial_t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$
(pas à la tâche)

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{a} = \dfrac{D\vec{v}}{Dt}}$ dérivée de la vitesse en suivant la (même) particule

F 10, ex 4

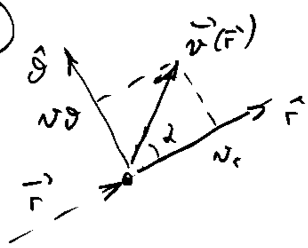
Un écoulement tourbillonnaire

(1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \left(\hat{r}\,\partial_r + \hat{\vartheta}\,\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \hat{z}\,\partial_z\right)\cdot\left(\hat{r}\,v_r(r) + \hat{\vartheta}\,v_\vartheta(r)\right)$

$= \partial_r v_r + \frac{1}{r}\,\hat{\vartheta}\cdot\underbrace{(\partial_\vartheta \hat{r})}_{\hat{\vartheta}}\,v_r = \frac{dv_r}{dr} + \frac{v_r}{r} = -\frac{A}{r^2} + \frac{A}{r^2} = 0$

$\Rightarrow$ écoulement incompressible $\quad \underbrace{\partial_t \rho}_{=0} + \vec{\nabla}(\underbrace{\rho}_{cte}\,\vec{v}) = 0$

(2)



$\tan\alpha = \frac{v_\vartheta}{v_r} = \frac{B}{A} = cte$

$\Rightarrow$ spirales formant un angle constant par rapport au rayon vecteur

Analytiquement :

$v_z = 0 \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow$ planes

$\frac{dr}{v_r} = \frac{r\,d\vartheta}{v_\vartheta}$

$\frac{dr}{A} = \frac{r\,d\vartheta}{B}$

$\frac{dr}{r} = \frac{A}{B}\,d\vartheta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{Log} r = \frac{A}{B}\vartheta + C}$

spirales logarithmiques

(3) $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v}$

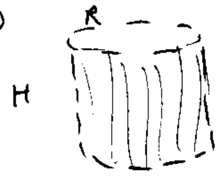
$= \left(\hat{r}\,\partial_r + \hat{\vartheta}\,\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \dots\right)\wedge\left(\hat{r}\,v_r(r) + \hat{\vartheta}\,v_\vartheta(r)\right)$

$= \hat{r}\wedge\hat{\vartheta}\;\partial_r v_\vartheta + \frac{1}{r}\,\hat{\vartheta}\wedge\underbrace{(\partial_\vartheta\hat{\vartheta})}_{-\hat{r}}\,v_\vartheta = \hat{z}\left(\frac{dv_\vartheta}{dr} + \frac{v_\vartheta}{r}\right)$

$= \hat{z}\left(-\frac{B}{r^2} + \frac{B}{r^2}\right) \Longrightarrow \boxed{\vec{\omega} = 0}$ pas de rotation locale "en bloc" !

C'est pas parceque ça tourbillonne que ça tourne (localement) nécessairement. Ici, un segment coloré reste // lui même !

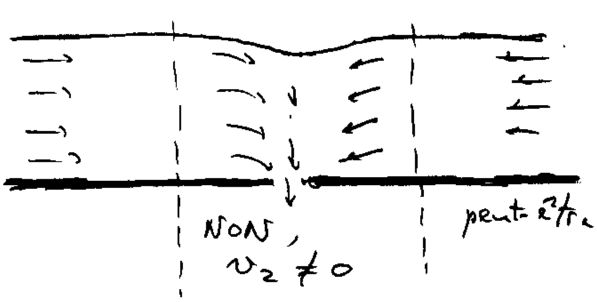
(4)



$\Phi_S = \int_S d^2\vec{A}\cdot\vec{v} = \int_S d^2A\;\hat{r}\cdot(\hat{r}\,v_r + \hat{\vartheta}\,v_\vartheta) = \int_0^H dz\int_0^{2\pi} d\vartheta\,R\,\frac{A}{R}$

$\boxed{\Phi_S = 2\pi\,A\,H}$

(5) Tourbillon de vidange ?



F10, ex 5 **Incompressibilité**

$\vec{v}(\vec{r},t)$

1. $$V(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} d^3r = \boxed{\int_{\mathcal{V}(t)} d^3r \; 1}$$ intégrale matérielle !

2. $$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} d^3r \left[\partial_t 1 + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\,1)\right]$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} d^3r \; \vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r},t)}$$

3. Si $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r},t) = 0$ pour $\vec{r},t \in \mathcal{D}$

alors $\frac{dV}{dt} = 0 \quad \forall \; \mathcal{V}(t) \subset \mathcal{D}$

$\Rightarrow V = \text{cte}$

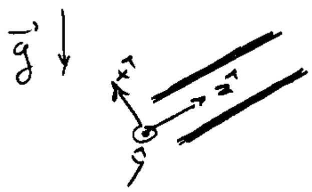
Masse conservée $\Rightarrow \rho = \text{cte}$

Cours : $\left.\begin{array}{l} \partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \\ \rho = \text{cte} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$

Conclusion :

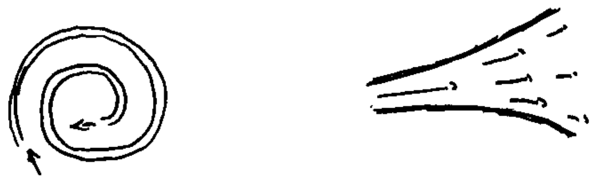
$$\boxed{\rho = \text{cte} \iff \vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r},t) = 0}$$

F 10, ex 6 — Navier-Stokes en unidimensionnel



On essaye $\vec{v}(\vec{r},t) = v(x,y,z,t)\ \hat{z}$

Contre ex :



① incompres. $\Leftrightarrow 0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \partial_z v \implies \boxed{v(x,y,t)}$

② $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v} = v\,\partial_z \begin{cases} v(x,y,t) \\ 0 \\ 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = 0}$

N-S : $\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\hat{p} + \nu\,\Delta\vec{v}$

$\hat{p} \hat{=} p - \rho\,\vec{g}\cdot\vec{r}$

$$\implies \boxed{\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho}\partial_x \hat{p} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\partial_y \hat{p} \\ \partial_t v &= -\frac{1}{\rho}\partial_z \hat{p} + \nu\,\Delta v \end{aligned}}$$

③ $\hat{p}(\cancel{x},\cancel{y},z,t) \implies \boxed{\hat{p}(z,t)}$

④ Écoulement stat^{re} ? $v(x,y)$, $\hat{p}(z)$

i) $\implies 0 = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{d\hat{p}}{dz}}_{\text{fct}(z)} + \underbrace{\nu\,\Delta v(x,y)}_{\text{fct}(x,y)} \quad \forall\, x,y,z \implies$ ctes

$\boxed{G \hat{=} \frac{d\hat{p}}{dz}} = \text{cte}$

ii) $\boxed{\Delta v(x,y) = \frac{G}{\eta}}$ avec $\eta = \rho\nu$ viscosité dynamique

(5) tuyau $\longrightarrow$ r, θ + pratique que x, y

solution $v(r)$?

i) $\Delta v = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} v)$

$$\vec{\nabla} v(r) = \left(\hat{r}\,\partial_r + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\partial_\theta + \dots\right) v = \hat{r}\,\partial_r v = \hat{r}\,\frac{dv}{dr}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla} v(r)\right) = \left(\hat{r}\,\partial_r + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\partial_\theta + \dots\right)\cdot \hat{r}\,\frac{dv}{dr}$$

$$= \partial_r\left(\frac{dv}{dr}\right) + \frac{1}{r}\,\hat{\theta}\cdot(\partial_\theta \hat{r})\,\frac{dv}{dr} = \frac{d}{dr}\frac{dv}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}$$

$$\boxed{\Delta v(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dv}{dr}\right)}$$

ii)
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dv}{dr}\right) = \frac{G}{\eta}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dv}{dr}\right) = \frac{G}{\eta}\,r$$

$$r\frac{dv}{dr} - \underbrace{r}_{0}\,\underbrace{\frac{dv}{dr}\Big|_0}_{\text{fini}} = \frac{G}{2\eta}\,r^2$$

fini (sinon contrainte de viscosité infinie !)

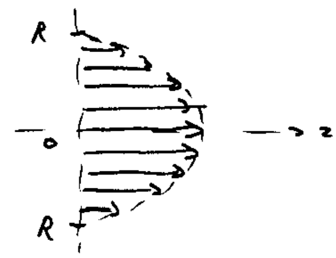
$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{G}{2\eta}\,r$$

$$v(r) - \underbrace{v(R)}_{0} = \frac{G}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right)$$

(cond. de non glissement)

$$\boxed{v(r) = \underbrace{\frac{G}{4\eta}}_{>0}\ \underbrace{\left(r^2 - R^2\right)}_{<0}}$$

profil parabolique



$\Rightarrow G < 0$ normal, pour pousser le fluide faut bien que $P_{amont} > P_{aval}$

iii)
$$\Phi = \int_S d^2\vec{A}\cdot\vec{v} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr\, r\,\frac{G}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right) = 2\pi\,\frac{G}{4\eta}\left(\frac{R^4}{4} - R^2\frac{R^2}{2}\right)$$

$$\boxed{\Phi = -\frac{\pi}{8}\,\frac{G R^4}{\eta}}$$

iv) $\exp^{nt}$ confirmé $\left(\Rightarrow \begin{cases} \text{modèle fluide newton} \\ \text{hypoth. de non glissement} \end{cases} \text{confirmés}\right)$

... tant que $\quad \mathcal{R}e \hat{=} \dfrac{\bar{V} R}{\nu} \lesssim 1000$

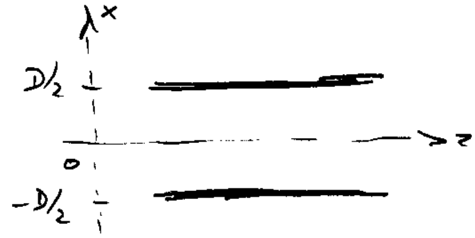
au delà turbulent :

la solution précédente est tj. solution...
mais elle devient instable (l'éq. de N-S est non linéaire)
$\Rightarrow$ elle n'est pas réalisée.

Turbulence $\Rightarrow \begin{cases} \vec{v} \text{ pas } /\!/ \ \hat{z} \\ \text{et dép. du } t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(\vec{r},t) = \begin{cases} v_x(x,y,z,t) \\ v_y(\quad) \\ v_z(\quad) \end{cases}$

c'est une autre paire de manches !

6 plaques ∞
$\Rightarrow$ invariance / translations $\hat{y}$?
Essayer $v(x)$



i) $\Delta v(x) = \dfrac{G}{\eta}$

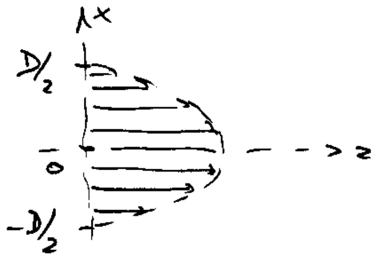
$$\frac{dv}{dx} = \frac{G}{\eta} x + A$$

$$v(x) - v\left(-\frac{D}{2}\right) = \frac{G}{2\eta}\left[x^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] + A\left[x + \frac{D}{2}\right]$$

$= 0$ non glissement

$$= v\left(\frac{D}{2}\right) = AD \quad \Rightarrow A = 0$$

$$\boxed{v(x) = \frac{G}{2\eta}\left[x^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]}$$ profil parabolique



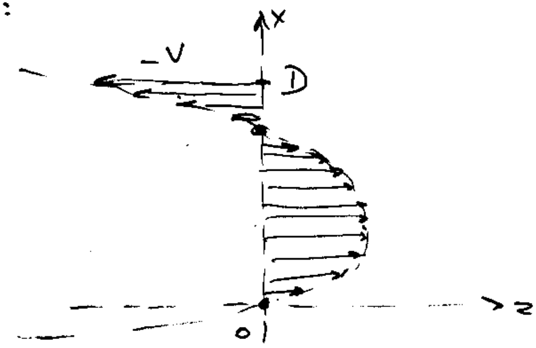
$$\varphi = \int_S d^2\vec{A} \cdot \vec{v} = \int_S dx\, dy \, \frac{G}{2\eta}\left[x^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]$$

$$= L_y \frac{G}{2\eta} \, 2 \int_0^{D/2} dx \left[x^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] = L_y \frac{G}{\eta}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{D}{2}\right] = -\frac{2}{3} L_y \frac{G}{\eta}\left(\frac{D}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\varphi}{L_y} = -\frac{1}{12} \frac{G D^3}{\eta}}$$

ii) $\neq G$ → c'est la même bête parabole
qu'il suffit de balader dans le plan (z,x)
jusqu'à ce que les 2 conditions soient satisfaites
(y a plus de symétrie) :

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(D) = -V \end{cases}$$



iii) $G = 0$

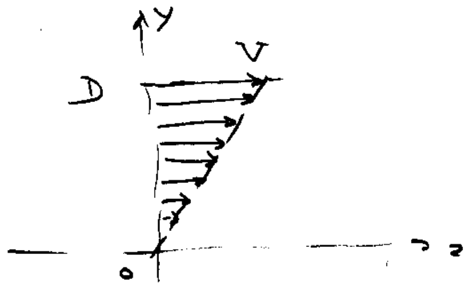
$\frac{dv}{dx} = A$

$v(x) - v(0) = Ax$

$v(0) = 0$ (non glissement)

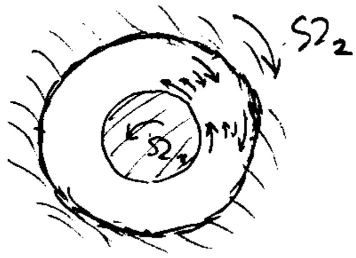
et $V = v(D) = AD$

$\Rightarrow \boxed{v(x) = V \frac{x}{D}}$ profil linéaire



écoulement de Couette plan
(sans grad. de pression, uniqu^{nt} causé par une paroi)

∃ aussi Couette circulaire :
(entre 2 cylindres)
aussi soluble



P'tite subtilité
- Couette plan ne dépend que de $V_2 - V_1$
  (les plaques à vit ctes sont inertielles)
- Couette circulaire ne dépend pas que de $\Omega_2 - \Omega_1$
  (les parois en rotation ne sont pas inertielles)