

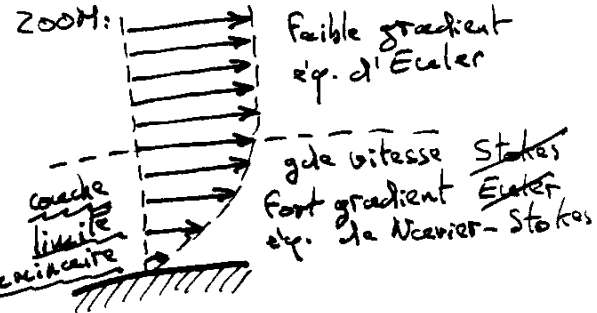
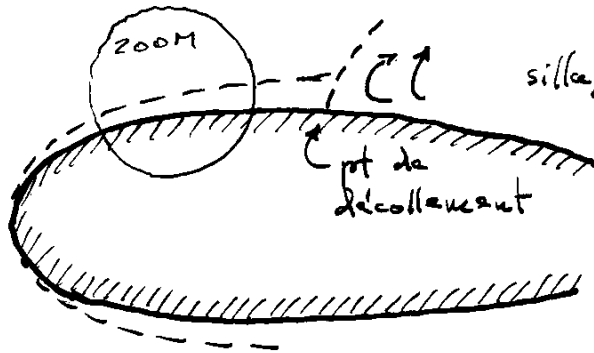
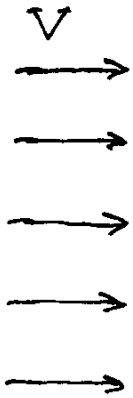
Théorie de la COUCHE LIMITE laminaire (Prandtl 1904)

Observation:

écoulement plan

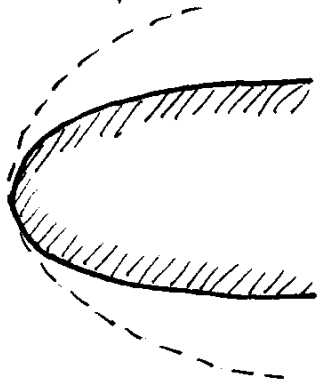
↑ } permanent
uniforme
assez rapide

↳ loin en amont d'un corps (cylindrique "infini")



L'écoulement dans la couche limite exige toute l'équation de Navier-Stokes, mais l'analyse se simplifie quand la couche limite est mince (épaisseur $\delta \ll x$ la distance au bord d'attaque, là où tout commence)

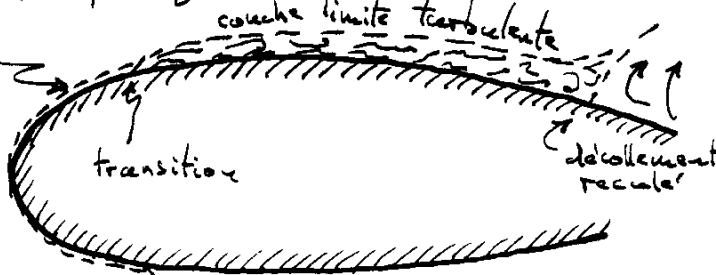
Pour V plus faible:



la couche limite s'épaissit
→ envahit tout l'espace
Basse vitesse →
→ Stokes partout

Pour V plus grande:

la couche limite s'amincit

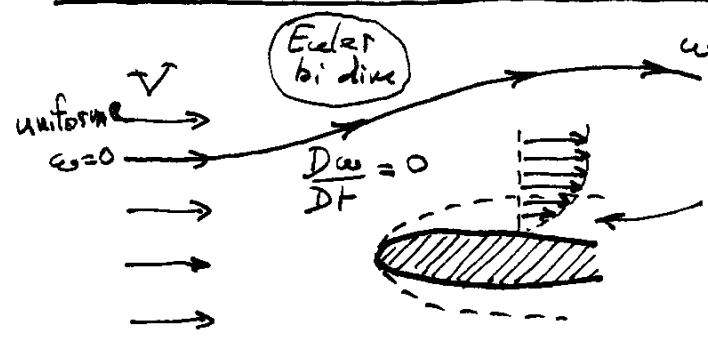


sillage moins important

Couche limite laminaire? Plusieurs niveaux d'analyse:

- eq. de Navier-Stokes en 2D ou 3D
 - analyse dimensionnelle des équations de la couche limite
 - et, qualitativement, encore plus simple ...
- ~ } équations de la couche limite, soluble numériquement (Blasius)

Par la diffusion de la vorticité'

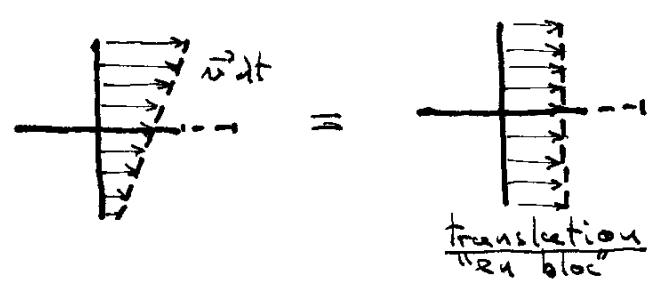


partout hors de la couche limite (et du sillage)

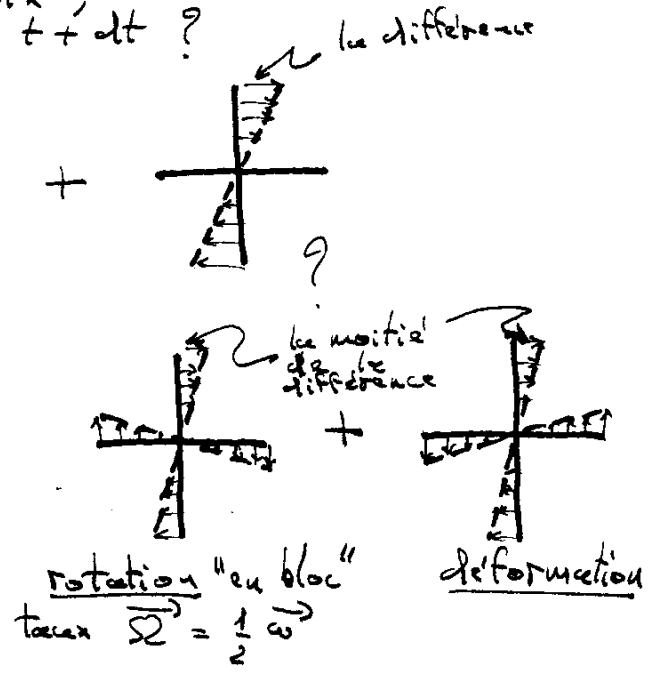
dans la couche limite, écoulement cisailé vorticité $\omega \neq 0$ apparue au bord d'attaque, générée par la paroi, propagée diffusée par la viscosité, propagée transportée par la convection

Parentèse sur l'écoulement cisailé.

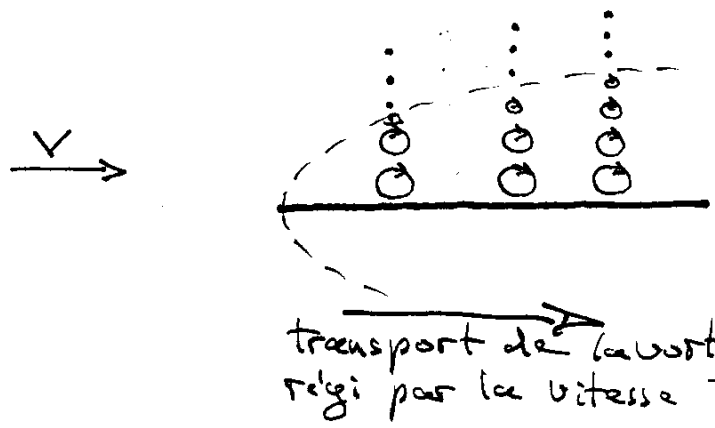
À t on y colore une croix ; où est la croix colorée à $t + dt$?



\Rightarrow cisailé est synonyme de vorticité



Pour une plaque plane, dans la couche limite, à partir du bord d'attaque, vorticité :

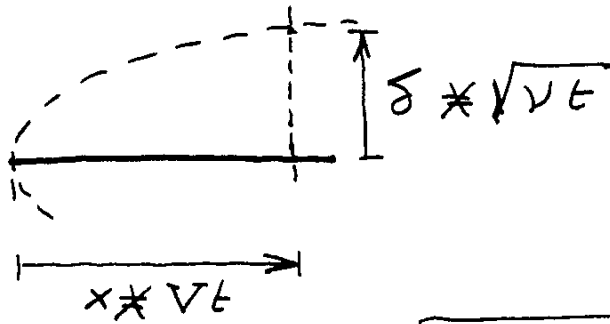


diffusion de la vorticité, régie par la viscosité ν

transport de la vorticité régi par la vitesse V

À temps t après passage avec bord d'attaque :

$$[\nu] = L^2 T^{-1} \Rightarrow \text{longueur caractéristique}$$



$$\Rightarrow t \propto \frac{x}{\nu}$$

$$\delta(x) \propto \sqrt{\frac{\nu x}{V}} \propto x^{1/2}$$

épaisseur de la couche limite à la distance x du bord d'attaque

$\frac{\delta}{x} \propto \sqrt{\frac{\nu}{Vx}} \Rightarrow$ idée : un nombre de Reynolds associé à la distance avec bord d'attaque :

$$Re(x) \equiv \frac{Vx}{\nu}$$

en fonction duquel :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1}{\sqrt{Re(x)}}$$

Comportement qualitatif de la couche limite laminaire empiriquement confirmé pour :

$$1 \ll Re(x) \lesssim 5 \times 10^5 \text{ à } 10^6$$

sinon :

- trop près du bord d'attaque (x petit)
- ou couche limite trop épaisse (ν petite) qui envahit tout l'espace \rightarrow écoulement de Stokes

un nombre de Reynolds critique de transition :

couche lim. laminaire \rightarrow couche lim. turbulente

Exemples

$$\text{avec } \begin{cases} \nu_{\text{eau}} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \\ \nu_{\text{air}} = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

- 1) Une plaque plane, $\begin{cases} \text{longueur } L_x = 1 \text{ m} \\ \text{vitesse } V = 1 \text{ m s}^{-1} = 3,6 \text{ km h}^{-1} \end{cases}$

$$Re(L_x) = \frac{VL_x}{\nu}$$

dans l'eau: $Re(L_x) = \frac{1 \times 1}{10^{-6}} = 10^6$

au bord de fuite de la plaque on est donc à la limite de la transition

couche lim. lam. \rightarrow couche lim. turbulente

épaisseur de la couche limite au bord de fuite:

$$\frac{\delta}{L_x} \approx \frac{1}{\sqrt{Re(L_x)}} = 10^{-3} \Rightarrow \delta(L_x) \approx 1 \text{ mm}$$

effectivement, c'est mince,
(pour une plaque de 1 m de longueur)

dans l'air: $Re(L_x) = \frac{1 \times 1}{15 \times 10^{-6}} = 7 \times 10^4$, c'est bien une couche limite entièrement laminaire.

$$\frac{\delta}{L_x} \approx \frac{1}{\sqrt{7 \times 10^4}} = 4 \times 10^{-3} \Rightarrow \delta(L_x) \approx 4 \text{ mm}$$

l'air est plus visqueux,
la couche limite s'étend plus au large.

l'écoulement autour d'un avion en papier est entièrement (sauf détails de structure) laminaire.

- 2) Distance de transition c. l. lam. \rightarrow c. l. turb ?

En prenant $Re_{\text{critique}} = 10^6$

Plaque à voile; $V = 10 \text{ m s}^{-1}$

$$x_{\text{crit}} = \frac{\nu}{V} 10^6 = \frac{10^{-6}}{10} 10^6 = 0,1 \text{ m}$$

\Rightarrow c'est à tout
turbulent

Épaisseur de la c. lim. à la transition:

$$\delta_{\text{crit}} = \frac{x_{\text{crit}}}{\sqrt{10^6}} = \frac{10^{-1}}{10^3} = 10^{-4} \text{ m} = 0,1 \text{ mm}$$

Airbus : $V = 200 \text{ m s}^{-1}$

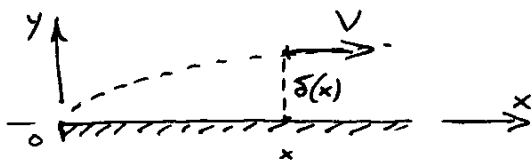
$$\Rightarrow \begin{cases} x_{\text{crit}} = 7,5 \text{ cm} \\ \delta_{\text{crit}} = 7,5 \times 10^{-2} \text{ mm} \end{cases}$$

l'écoulement autour de l'aile, du fuselage est \approx entièrement turbulent

\Rightarrow comportement aérodynamique très différent de l'avion en papier, en fait plus contrôlable (le vol laminaire est bcp + délicat, mais l'enjeu est - vital !)

- avantage aussi pour la traînée de sillage, ça recule le point de décollement.

Traînée de friction sur une face d'une plaque plane



contrainte tangentielle au contact avec la paroi :

$$C_f = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \neq \frac{V}{\delta}, \quad \text{avec } \delta(x) \neq \sqrt{\frac{\nu x}{V}}$$

\Rightarrow Force tangentielle sur l'élément $dz dx$ de paroi à distance x du bord d'attaque :

$$d^2 F_x = C_f(x) dz dx \\ \neq \eta V \sqrt{\frac{\nu}{V x}} dz dx$$

$$dF_x \neq L_z \eta V^{3/2} \nu^{-1/2} x^{-1/2} dx$$

Sur la face $\left\{ \begin{array}{l} \text{de largeur (envergure) } L_z \\ \text{de longueur (corde) } L_x \end{array} \right.$

$$F_x \neq L_z \rho V^{3/2} \nu^{-1/2} 2 x^{1/2} \Big|_0^{L_x}$$

$$\frac{F_x}{L_z} \neq 2 \rho V^{1/2} \nu^{3/2} L_x^{1/2}$$

$$\frac{F_x}{L_z L_x} \neq 2 \rho V^2 \left(\frac{\nu}{V L_x} \right)^{1/2}$$

⇒ écriture traditionnelle :

$$\frac{F_x}{L_z L_x} \approx \frac{4}{\sqrt{Re(L_x)}} \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (\text{sur une face de la plaque})$$

aire de la plaque $\left\{ \begin{array}{l} \text{sans dimension} \\ \text{le fameux coefficient } C_x \\ \text{(attention: il dépend de la vitesse)} \end{array} \right.$ pression d'arrêt (effective)

- C'est une contribution à la traînée de la plaque,
- mais la contribution dominante vient de la traînée induite (tourbillons du sillage), surtout s'il y a transition à une couche limite turbulente et/ou décollement,
 - sauf à très bas Re , $\delta \rightarrow \infty$, la viscosité agit partout, on n'est plus dans le cadre de la théorie de la couche limite, équation de Stokes (en fait, c'est plutôt plus simple, équation linéaire)

Ordre de grandeur :

eau : $V = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$V = 1 \text{ m s}^{-1}$

plaque $\left\{ \begin{array}{l} L_x = 0,5 \text{ m} \\ L_z = 1 \text{ m} \end{array} \right.$

nb de Reynolds avec b. d. fuite :

$Re(L_x) = \frac{1 \times 0,5}{10^{-6}} = 5 \times 10^5$

c'est juste (?) à la limite c.l. lam. \rightarrow turbul.

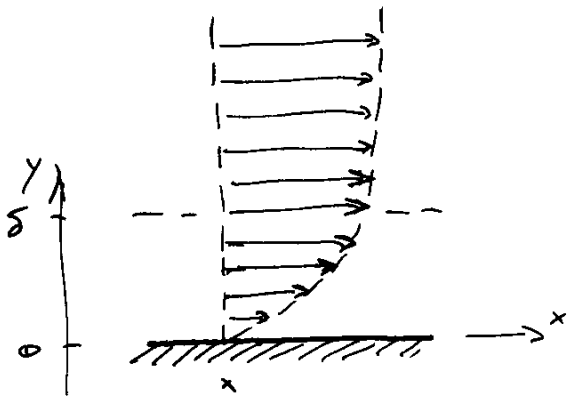
épaisseur de la c. lim. loc. avec b. d. fuite :

$\frac{\delta(L_x)}{L_x} \approx \frac{1}{\sqrt{5 \times 10^5}} = 1,4 \times 10^{-3} \Rightarrow \delta(L_x) \approx 0,7 \text{ mm}$

traînée de friction :

$F_t \approx 1 \times 0,5 \frac{4}{\sqrt{5 \times 10^5}} \frac{1}{2} 10^3 1^2 = 1,4 \text{ N} = 140 \text{ gf}$
 ça a du bon sens.

Variation de pression à travers la couche limite



} couche limite laminaire
 \Rightarrow écoulement \approx parallèle
 pas d'accélération selon \vec{y}

\Rightarrow dans la couche limite, suivant \vec{y} , la pression varie comme en hydrostatique: $\hat{p}(x,y) = p(x,y) + \rho g y = \text{cte}$

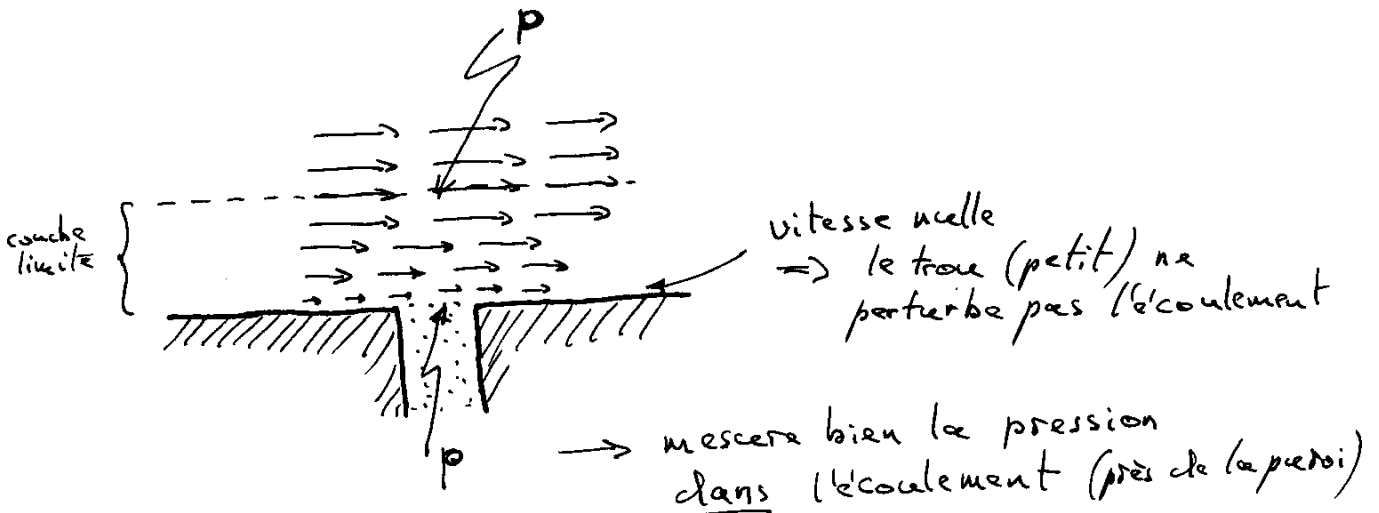
Faible épaisseur \Rightarrow

$$p(x, 0) \approx p(x, \delta)$$

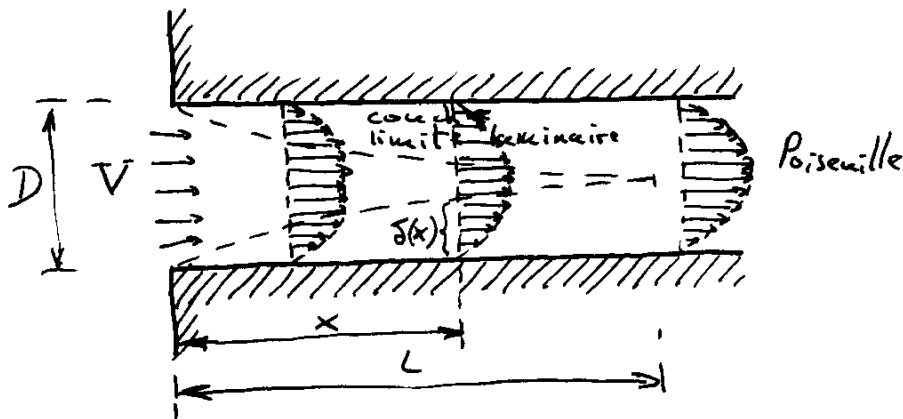
La pression ne varie pas dans la traversée de la couche limite

(en dehors de la couche limite, la pression est donnée par l'équation d'Euler).

Ça explique pourquoi les prises de pression statique fonctionnent si bien (cf tube de Pitot par ex)



Distance d'établissement de l'écoulement de Poiseuille



Un nb de Reynolds associé à l'écoulement de Poiseuille:

$$\mathcal{R}_P = \frac{VD}{\nu} \quad (V = \text{une vitesse typique, p. ex } \varphi / \pi D^2 / 4)$$

Un nb de Reynolds associé à la couche limite à la distance x de l'entrée:

$$\mathcal{R}_{c.l.}(x) = \frac{Vx}{\nu} = \frac{x}{D} \mathcal{R}_P, \quad \frac{\delta(x)}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}_{c.l.}(x)}}$$

Si régime de Poiseuille établi à la distance L :

$$\left. \begin{array}{l} \delta(L) \approx D \\ \frac{\delta(L)}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}_{c.l.}(L)}} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{R}_{c.l.}(L) \approx \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

et comme $\mathcal{R}_{c.l.}(L) = \frac{L}{D} \mathcal{R}_P$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{L}{D} \approx \mathcal{R}_P}$$

Exemple: eau $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
 $V = 1 \text{ cm s}^{-1}$
 tuyau $D = 1 \text{ cm}$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_P = \frac{VD}{\nu} = \frac{10^{-2} \times 10^{-2}}{10^{-6}} = 100 < 2000 = \mathcal{R}_{critique}$$

\Rightarrow ça tend bien vers un écoulement de Poiseuille (non turbulent)

$$L = D \mathcal{R}_P = 10^{-2} \cdot 10^2 = 1 \text{ m} \quad \text{c'est long!}$$

(en fait + court dans une géométrie cylindrique / plaques parallèles, peroï refermé \Rightarrow plus d'influence)

Pour faire mieux

1) Paroi courbe

 \sim plane si $\delta \ll R_{\text{courbure}}$

2) Équation de la couche limite (Prandtl):

Pour analyse quantitative,
 équation de N-S } dans la } $\begin{cases} (v_x \partial_x + v_y \partial_y) v_x \approx \nu \partial_y^2 v_x \\ \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0 \end{cases}$
 plaque fine $\frac{1}{2}$ infinie } couche } limite

Rem: on garde à la fois du terme d'inertie
 et du terme de viscosité.

Ça donne finalement une équation non linéaire
 à une variable (Blasius),
 dont la résolution numérique conduit à

$$\frac{F_x}{L_x L_z} = \frac{1,33}{\sqrt{Re(L_x)}} \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (\text{sur une face})$$

$$\partial_y p(x, y) \approx 0 \quad (\text{pour } y \in \text{couche lim.})$$

Et après? Tout commence...

En tout cas la théorie de la couche limite permet
 de remplacer le corps réel par un corps fictif ayant
 la forme de la couche limite (pratiquement identique ici),
 aussi appelé corps de Rankine, autour duquel
 l'écoulement est purement Euler ("fluide parfait")
 avec une simple condition d'étanchéité (vitesse à
 la paroi = couche limite non nulle mais tangente à la
 paroi)

Pour l'équation d'Euler \exists multitude de méthodes
 analytiques adaptées.

