

Calculatrice, intelligence et bon sens strictement autorisés.

Attention : L'ensemble de ce sujet est probablement trop long pour être complètement traité en trois heures, mais cela n'empêchera pas d'obtenir, éventuellement, la note maximale. Chaque problème commence par faire appel à des notions de base, aussi élémentaires que fondamentales, dont la maîtrise vous assurera la moyenne. Ensuite... c'est plus difficile mais certainement faisable !

Quelques informations plus ou moins utiles :

Équation de la flexion : $\mathcal{M}_f = EI_z f''$

Contrainte normale en flexion simple : $c_n(y) = -(\mathcal{M}_f/I_z) y$

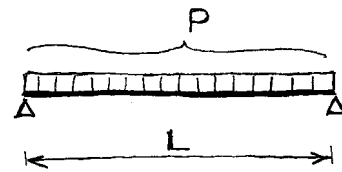
Équation de Navier-Stokes : $(\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{v}$

1 Flexion

Une poutre de longueur L , section uniforme, est soumise à une charge totale P uniformément répartie.

A. La poutre est simplement appuyée sur ses deux extrémités.

- i) Déterminez
 - les réactions des appuis ;
 - les expressions de l'effort tranchant et du moment fléchissant.
- ii) Représentez l'allure des diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.
- iii) Déterminez l'expression de la flèche.



B. La poutre est encastree à ses deux extrémités.

- i) Que pouvez-vous dire à présent des réactions des appuis ?
- ii) Déterminez l'expression de l'effort tranchant.
- iii) Déterminez, en fonction du moment d'encastrement,
 - le moment fléchissant,
 - la dérivée de la flèche.
- iv) En déduire la valeur du moment d'encastrement et l'expression de la flèche.
- v) Représentez l'allure des diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.



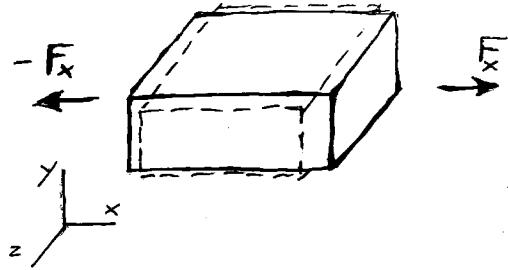
C. Comparez, dans les deux cas, les valeurs maximales

- de la flèche,
- du moment fléchissant,
- de la contrainte normale.

2 Élasticité

A. On considère un barreau parallélépipédique (l_x, l_y, l_z) d'un matériau élastique (module d'élasticité E , coefficient de Poisson ν).

i) Le barreau est en équilibre sous l'effet de forces réparties uniformément sur deux faces opposées, disons (l_y, l_z) par exemple, de résultantes F_x et $-F_x$ respectivement. Donnez les expressions des allongements des côtés, $(\delta l_x/l_x)_{F_x}$, $(\delta l_y/l_y)_{F_x}$ et $(\delta l_z/l_z)_{F_x}$, dûs à ces forces.



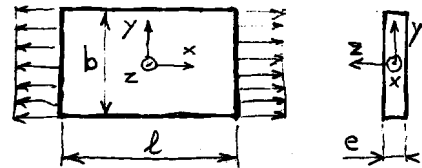
ii) Lorsque le barreau n'est soumis, de même, qu'à des forces sur la paire de faces (l_z, l_x) , donnez les expressions des allongements $(\delta l_x/l_x)_{F_y}$, $(\delta l_y/l_y)_{F_y}$ et $(\delta l_z/l_z)_{F_y}$ dûs à ces forces.

iii) En déduire l'expression de l'allongement $\delta l_x/l_x$ causé par un ensemble de forces appliquées normalement et uniformément sur chacune des faces.

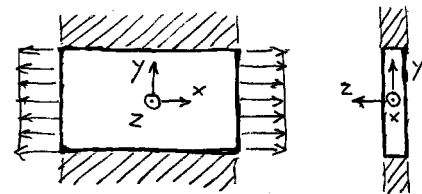
B. En déduire les expressions des déformations principales en un point d'un milieu élastique en termes des contraintes principales en ce point.

C. On considère une plaque d'acier, épaisseur e , largeur b , longueur l .

i) La plaque est soumise à un ensemble de forces uniformément réparties sur ses extrémités (figure ci-contre). Les résultantes de ces forces réparties ont pour mesures algébriques F et $-F$ respectivement. Déterminez les contraintes σ_x , σ_y , σ_z et les déformations ε_x , ε_y , ε_z dans la plaque.



ii) Les bords de la même plaque, soumise aux mêmes forces sur ses extrémités, sont maintenant fixés (figure ci-contre). Déterminez les contraintes et les déformations.



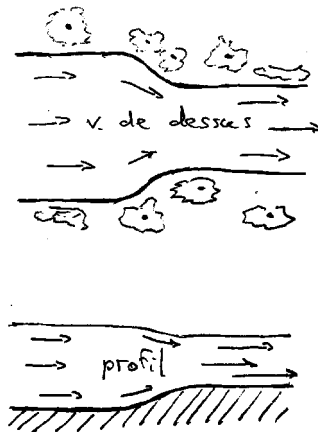
iii) On définit, par analogie avec le ressort simple, la raideur k de la plaque par la relation $F = k \delta l$ où δl est l'élongation sous l'effet de la force résultante F . Calculez les raideurs de la plaque dans les configurations à bords libres et à bords fixés respectivement. Comparez les valeurs de ces raideurs.

D. i) En repartant des expressions des déformations en termes des contraintes en axes principaux, déterminez les expressions des composantes ε_{ij} du tenseur des déformations en termes des composantes σ_{ij} du tenseur des contraintes en axes quelconques.

ii) En déduire les expressions des composantes σ_{ij} en termes des composantes ε_{ij} .

3 Écoulement dans un canal

L'eau s'écoule en régime permanent dans un canal à peu près horizontal présentant une variation de section (variation de largeur et/ou de profondeur) entre deux régions de sections uniformes. On suppose la vitesse de l'écoulement à peu près uniforme dans chaque section.



i) On se permet d'utiliser l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant à la surface de l'eau. En déduire une relation entre :

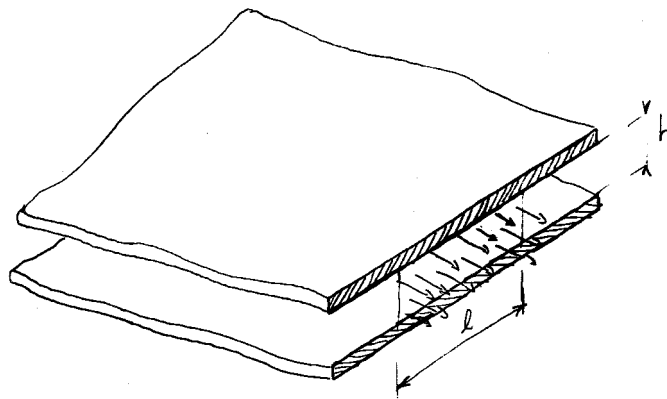
- les aires A_1 et A_2 des sections de l'écoulement dans les régions de sections uniformes,
- la différence δ des niveaux de la surface de l'eau dans lesdites régions,
- et le débit Q dans le canal.

ii) En déduire une estimation du débit en termes des deux aires et de la différence des niveaux, toutes grandeurs aisément mesurables

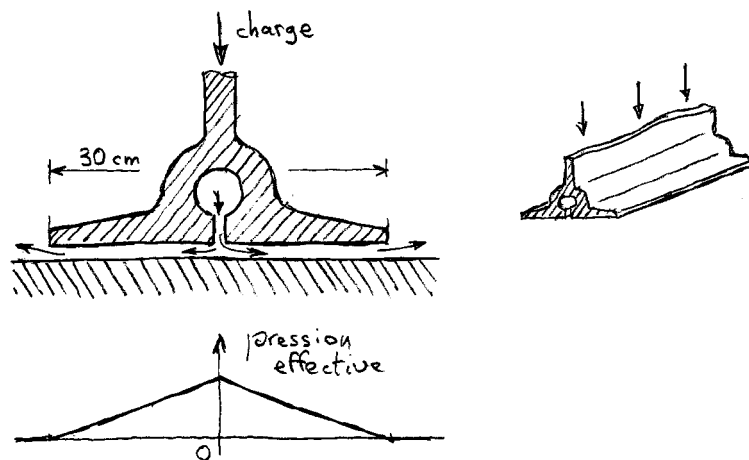
iii) En déduire le sens de variation du niveau selon que l'on a affaire à un rétrécissement ou un élargissement de section. Donnez une raison qualitative simple à ce comportement en apparence paradoxal.

4 Écoulement de Poiseuille plan

- i) Déterminez, en terme du gradient de pression, l'expression du profil des vitesses d'un écoulement laminaire permanent entre deux plaques parallèles "infinies" (distance h , figure ci-contre).
- ii) En déduire l'expression du débit dans une section de largeur l (figure ci-contre).



iii) On réalise un appui mobile à faible friction sous forme d'un patin rectangulaire allongé (figure ci-dessous). Le contact direct entre le patin et sa portée est évité en injectant de l'huile sous pression par une fente centrale longitudinale.



Le patin a une largeur de 30 cm et supporte une charge de $1,2 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. Sous quel débit faut-il injecter l'huile, de viscosité $0,3 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, pour maintenir un jeu de $4 \times 10^{-2} \text{ mm}$ entre patin et portée ?

UV: PH314

Mécanique des Milieux Déformables

Date: jeudi 2 septembre 2004

N°

Nom: LAVERNE

Prénom: ALEXIS

Nom marital:

Note définitive :

NOM: A. L.

Appréciations :

Correcteurs

NOM :

Appréciations :

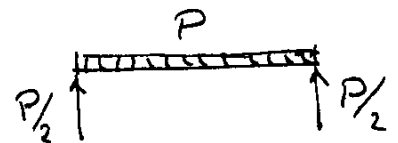
NOTE :

NOTE :

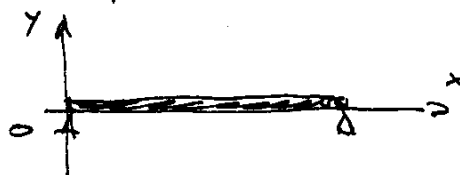
1 Flexion

(A) i) Appuis simples \Rightarrow pas de moments,
 $M_1 = M_2 = 0$

équilibre } \Rightarrow $R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$
 symétrie }

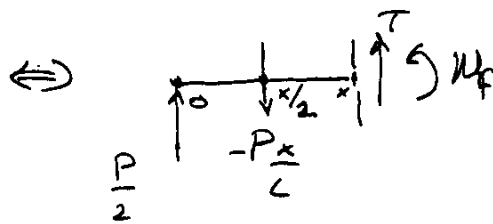
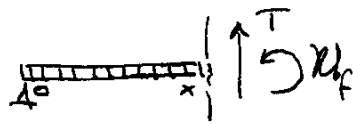


Pour l'effort tranchant et le moment fléchissant, se vaut le coup de traiter ça algébriquement, en prenant des conventions de signe.



2

Computa:

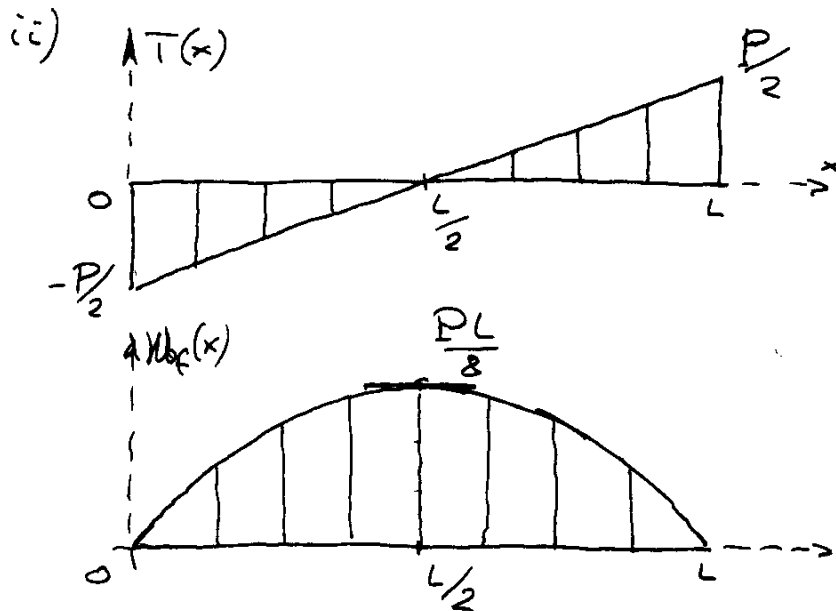


$$\Sigma F = \frac{P}{2} - \frac{Px}{L} + T = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = P \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)}$$

$$\Sigma W_bf = -\frac{Px}{L} \cdot \frac{x}{2} + T_x + W_bf = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{W_bf(x) = \frac{Px}{2} \left(1 - \frac{x}{L} \right)} = \frac{PL}{2} \frac{x}{L} - \frac{PL}{2} \frac{x^2}{L^2}$$



(ii)

$$EI_2 F''(x) = W_bf(x)$$

$$= \frac{PL}{2} \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right)$$

$$EI_2 \left[F'(x) - f' \left(\frac{L}{2} \right) \right] = \frac{PL}{2} \left\{ \frac{1}{2L} \left[x^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{3L^2} \left[x^3 - \left(\frac{L}{2} \right)^3 \right] \right\}$$

↑
0 (symetria)

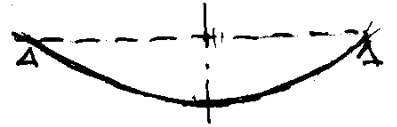
$$EI_2 F'(x) = \frac{PL}{2} \left\{ -\frac{L}{12} + \frac{1}{2L} x^2 - \frac{1}{3L^2} x^3 \right\}$$

$$EI_2 [f(x) - f(0)] = \frac{PL}{2} \left\{ -\frac{L}{12} x + \frac{1}{6L} x^3 - \frac{1}{12L^2} x^4 \right\}$$

0 (appui indéformable)

$$EI_2 f(x) = -\frac{PL^3}{24} \left[\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right]$$

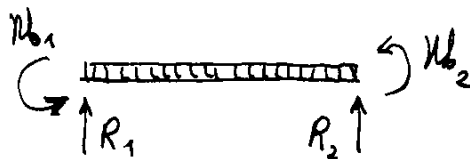
on vérifie: $f(0) = 0 = f(L)$
 symétrie / $x = \frac{L}{2}$
 partout < 0



(B) i) Encastré \Leftrightarrow { forces } \Leftrightarrow { résultante, moment }

↑
réaction

↑
moment d'encastré



Symétrie \Rightarrow $\begin{cases} R_2 = R_1 \\ M_2 = -M_1 \end{cases}$

\Rightarrow - une inconnue de plus (M_{b1}) par rapport au cas précédent
 - même nombre d'équations ($\Sigma F = 0, \Sigma M = 0$)

\Rightarrow système hyperstatique

Encore

$$R_2 = R_1 = \frac{P}{2}$$

mais

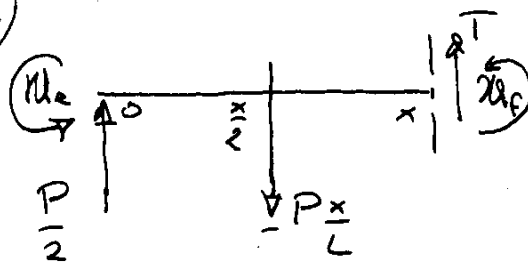
$$M_2 = -M_1 = -M_e$$

inconnu à déterminer par une équation supplémentaire (déformation)

ii) Pour l'effort tranchant, rien de changé,

$$T(x) = P \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)$$

iii)



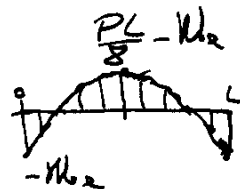
$$\Sigma M_{/0} = M_{b_e} - \frac{Px}{L} \frac{x}{2} + Tx + M_{b_f} = 0$$

$$\Rightarrow M_{b_f}(x) = M_{b_f}(x) - M_{b_e}$$

(encastr.) (appui simple)

4

$$\mathcal{M}_0(x) = \frac{PL}{2} \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) - \mathcal{M}_e$$



$$EI_2 F'' = EI_2 F'' - \mathcal{M}_e$$

(appuis simples)

$$EI_2 \left[F'(x) - F'\left(\frac{L}{2}\right) \right] = EI_2 \left[\underset{(s)}{F'(x)} - \underset{(s)}{F'\left(\frac{L}{2}\right)} \right] - \mathcal{M}_e \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

0 (symétrie)

$$EI_2 F'(x) = \frac{PL}{2} \left(-\frac{L}{12} + \frac{1}{2L} x^2 - \frac{1}{3L^2} x^3 \right) - \mathcal{M}_e \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

ii) $EI_2 F'(0) = -\frac{PL^2}{24} + \mathcal{M}_e \frac{L}{2}$

0 (encastrement)

$$\Rightarrow \mathcal{M}_e = \frac{PL}{12}$$

$$EI_2 [F(x) - F(0)] = EI_2 \left[\underset{(s)}{F(x)} - \underset{(s)}{F(0)} \right] - \frac{\mathcal{M}_e}{2} x^2 + \frac{\mathcal{M}_e L}{2} x$$

0 (appui)

$$EI_2 f(x) = -\frac{PL^3}{24} \left[\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right] - \frac{PL}{24} x^2 + \frac{PL^2}{24} x$$

$$EI_2 F(x) = -\frac{PL^3}{24} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right]$$

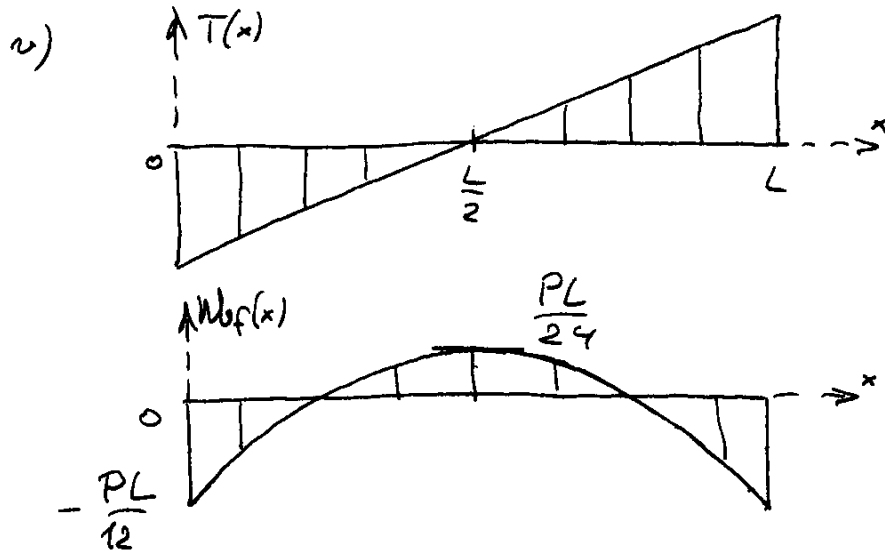
$$= -\frac{PL^3}{24} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

On vérifie :

$$\begin{cases} F(L) = 0 \\ \text{symétrie} / x = \frac{L}{2} \\ F(x) < 0 \text{ partout} \end{cases}$$

Alors :





© Dans les 2 cas, flèches maxi au milieu.

Intuitivement: l'encastrement augmente la rigidité de l'ensemble (soit rajoutée une liaison) et doit donc diminuer la déformation.

$$EI_2 f_{(s)}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{24} \left[\frac{1}{2} - 2 \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \right]$$

↑
simple

$$= -\frac{PL^3}{24} \frac{2^3 - 2^2 + 1}{2^4} = -\frac{5}{384} PL^3$$

$$EI_2 f_{(e)}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{24} \left[\frac{1}{2^2} - 2 \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \right]$$

↑
encastré

$$= -\frac{PL^3}{24} \frac{1}{2^4} = -\frac{1}{384} PL^3$$

Encastrements \rightarrow flèche maxi 5 fois plus petite.

En appuis simples:

$$|M_b(x)| \text{ maxi au milieu} = \frac{PL}{8}$$

En appuis encastrés:

$$|M_b(x)| \text{ maxi aux extrémités (encastrés)} = \frac{PL}{12}$$

Et donc, pour les contraintes maxi, à sections identiques, proportionnelles aux M_b :

$$\frac{|C_n(e)|_{\text{max}}}{|C_n(s)|_{\text{max}}} = \frac{2}{3}, \quad \text{la contrainte maxi est plus faible en cas d'encastrement.}$$

Résultat non intuitif: l'augmentation de rigidité diminue la déformation, certes, mais augmente l'effort! Moralité: faut être prudent.

2 Élasticité

(A) i) F_x seule \Rightarrow Contrainte $\sigma_x = \frac{F_x}{l_y l_z}$

déformations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\delta l_x}{l_x} \right)_{F_x} = \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{Hooke}) \\ \left(\frac{\delta l_y}{l_y} \right)_{F_x} = -\nu \left(\frac{\delta l_x}{l_x} \right)_{F_x} = -\frac{\nu \sigma_x}{E} \quad (\text{Poisson}) \\ \left(\frac{\delta l_z}{l_z} \right)_{F_x} = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \end{array} \right.$$

ii) $F_y \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\delta l_y}{l_y} \right)_{F_y} = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \sigma_y = \frac{F_y}{l_z l_x} \\ \left(\frac{\delta l_z}{l_z} \right)_{F_y} = -\frac{\nu}{E} \sigma_y \\ \left(\frac{\delta l_x}{l_x} \right)_{F_y} = -\frac{\nu}{E} \sigma_y \end{array} \right.$$

iii) (F_x, F_y, F_z) , linéarité

$$\Rightarrow \frac{\delta l_x}{l_x} = \left(\frac{\delta l_x}{l_x} \right)_{F_x} + \left(\frac{\delta l_x}{l_x} \right)_{F_y} + \left(\frac{\delta l_x}{l_x} \right)_{F_z}$$

$$\boxed{\frac{\delta l_x}{l_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z)}$$

(B) En axes principaux, disons (x^*, y^*, z^*) , on peut utiliser les expressions précédentes donnant les déformations principales $\varepsilon_{x^*} = \frac{\delta l_{x^*}}{l_{x^*}}$, etc... en termes des contraintes principales, soit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon_{x^*} = \frac{\sigma_{x^*}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{y^*} + \sigma_{z^*}) \\ \varepsilon_{y^*} = \frac{\sigma_{y^*}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{z^*} + \sigma_{x^*}) \\ \varepsilon_{z^*} = \frac{\sigma_{z^*}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{x^*} + \sigma_{y^*}) \end{array}}$$

7

c) i) Bords libres \Rightarrow

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{F}{be} \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= 0 \end{aligned}$$

Contraintes purement normales sur les faces respectives \Rightarrow - elles sont principales
- les cotés de la plaque sont les directions principales.

Équations de l'élasticité / axes principaux

$$\Rightarrow \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu \epsilon_x \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu \epsilon_x \end{aligned}$$

ii) Bords fixés \Rightarrow

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{F}{be} \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= 0 \end{aligned}$$

Encore en axes principaux :

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y \\ \epsilon_y = 0 = \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_x \\ \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_y = \nu \sigma_x$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_x \end{aligned}$$

iii) Raideur $k = \frac{F}{\delta l} = \frac{\sigma_x be}{\epsilon_x l}$

$$\begin{aligned} k_{\text{libr.}} &= E \frac{be}{l} \\ k_{\text{fix.}} &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{be}{l} \end{aligned}$$

$$\nu < 0,5 \Rightarrow k_{\text{fix.}} = \frac{1}{1-\nu^2} k_{\text{libr.}} > k_{\text{libr.}}$$

comme on s'y attendait : ajouter une liaison (fixer les bords) rigidifie le système.

(D) Composantes tensorielles en axes principaux:

$$(\sigma_{i^*j^*}) = \begin{pmatrix} \sigma_{1^*} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2^*} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3^*} \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon_{i^*j^*}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1^*} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2^*} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3^*} \end{pmatrix}$$

Équations de l'élasticité en axes principaux:

$$\begin{cases} \varepsilon_{1^*} = \frac{1}{E} \sigma_{1^*} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{2^*} + \sigma_{3^*}) \\ \varepsilon_{2^*} = \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{1^*1^*} = \frac{1}{E} \sigma_{1^*1^*} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{2^*2^*} + \sigma_{3^*3^*}) \\ \varepsilon_{1^*2^*} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Écriture tensorielle ? (Cia-d. où toutes les composantes jouent toutes le même rôle)

$$\begin{cases} \varepsilon_{1^*1^*} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{1^*1^*} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{1^*1^*} + \sigma_{2^*2^*} + \sigma_{3^*3^*}) \\ \varepsilon_{1^*2^*} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{1^*2^*} \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{1^*1^*} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{1^*1^*} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) \delta_{1^*1^*} \\ \varepsilon_{1^*2^*} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{1^*2^*} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) \delta_{1^*2^*} \\ \dots \end{cases}$$

$$\underbrace{\varepsilon_{i^*j^*}}_{\text{tenseur}} = \frac{1+\nu}{E} \underbrace{\sigma_{i^*j^*}}_{\text{scal. tens.}} - \frac{\nu}{E} \underbrace{\text{Tr}(\sigma)}_{\text{scal.}} \underbrace{\delta_{i^*j^*}}_{\text{tens.}}$$

C'est gagné: même écriture dans tout repère (orthonormé)

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) \delta_{ij}}$$

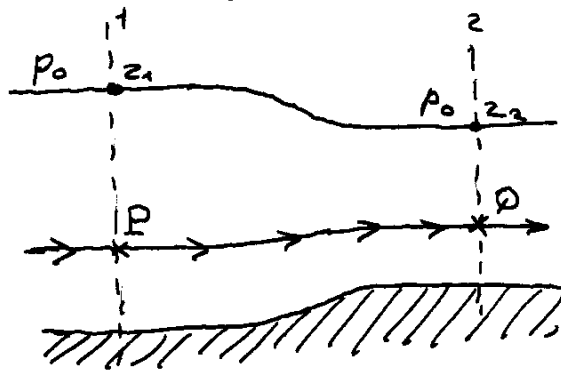
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\varnothing}{A_1} \right)^2 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\varnothing}{A_2} \right)^2 + \rho g z_2$$

$$\boxed{\varnothing^2 \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right) + 2g \delta = 0}$$

avec

$$\boxed{\delta \hat{=} z_1 - z_2}$$

Remarque: et si on avait pris une autre ligne de courant ?



p. ex. entre P et D :

$$\frac{1}{2} \rho V_1^2 + p_P + \rho g z_P \hat{=} \frac{1}{2} \rho V_2^2 + p_D + \rho g z_D$$

Mais, écoulement parallèle dans la section 1
 \Rightarrow la pression y suit la loi hydrostatique :

$$p_P + \rho g z_P = p_0 + \rho g z_1,$$

et de même dans la section 2

$$p_D + \rho g z_D = p_0 + \rho g z_2$$

\Rightarrow on obtient la même relation.

(L'hypothèse d'écoulements parallèles et uniformes dans les sections 1 et 2 est cruciale.)

$$ii) \varnothing^2 = \frac{2g \delta}{\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varnothing = \sqrt{2g} A_1 \sqrt{\frac{\delta}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}$$

↓
débit

$\delta = z_1 - z_2$
 $\uparrow \nearrow$
 mesurables

iii) Rétrécissement: $A < A_1 \Rightarrow J > 0$, abaissement!
et inversement.²

Étonnant: quand la section diminue, remontée du fond et/ou rapprochement des berges, le niveau de l'eau ne s'oppose pas à cette variation, au contraire, il s'abaisse.

Mais justement:

rétrécissement } \rightarrow vitesse \uparrow \rightarrow é.n. cinétique \uparrow
+ débit conservé } (d'une "particule" fluide)

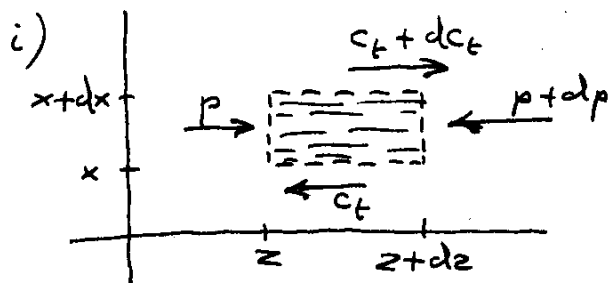
Augmentation d'énergie cinétique prise aux dépens de l'énergie potentielle
 \Rightarrow abaissement (pour une "particule" à la surface).

Et pour une "particule" qui suit une ligne de fond? Elle monte certes, $z \uparrow$

son énergie cinétique $\frac{1}{2} \rho V^2 \uparrow$

mais elle prend cette énergie aux dépens de $p + \rho g z$ qui décroît on l'a vu.

4 Écoulement de Poiseuille plan



$$c_t = \eta \frac{du}{dx}$$

$$dc_t = \eta \frac{d^2u}{dx^2} dx$$

$$dp = \frac{dp}{dz} dz$$

Toutes vitesses constantes \rightarrow pas d'accélération
Équilibre des forces:

$$\int dz \eta \frac{d^2u}{dx^2} dx - \int dx \frac{dp}{dz} dz = 0$$

$$\eta \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dp}{dz}$$

$$fct(x) = fct(z) = cte$$

gradient de pression $G \hat{=} \frac{dp}{dz} = \text{cte}$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{G}{\eta}$$

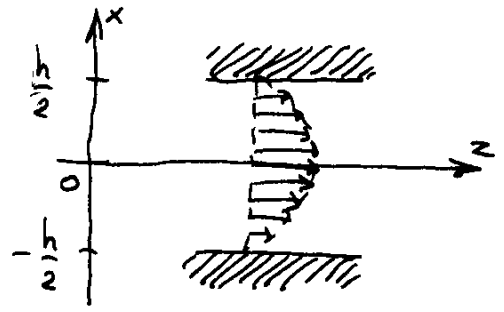
$$v'(x) - v'(0) = \frac{G}{\eta} x$$

↑
0 (symétrie)

$$v(x) - v\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{G}{2\eta} \left[x^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right]$$

↑
0 (non glissement)

$$v(x) = -\frac{G}{2\eta} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - x^2 \right]$$

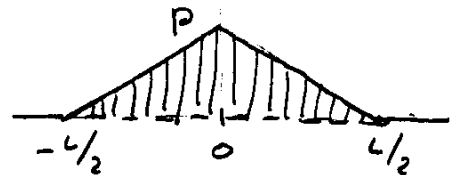


$$\begin{aligned} \text{ii) } \varphi &= l \int_{-h/2}^{h/2} dx v(x) = l \left(-\frac{G}{2\eta} \right) 2 \int_0^{h/2} dx \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - x^2 \right] \\ &= -\frac{G l}{\eta} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right] = -\frac{G l}{\eta} \left(\frac{h}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\varphi = -\frac{G l h^3}{12 \eta}$$

iii) Système baigné par la pression atmosphérique. On la retranche \Rightarrow pressions effectives.

$G = \text{cte} \Rightarrow$ profil :



$$G = \frac{0 - p}{\frac{L}{2} - 0} = -2 \frac{p}{L}$$

Force résultante verticale sur lL ?

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} p \\ \diagdown \\ \square \\ \diagup \\ 0 \quad \quad \quad \frac{L}{2} \end{array} \Rightarrow F = p l \frac{L}{2}$$

\Rightarrow pour porter F sur une longueur l de patin, il faut réaliser, au milieu, la pression effective

$$p = 2 \frac{F}{lL},$$

donc le gradient de l'écoulement

$$G = - \frac{4}{L} \frac{F}{lL} = - \frac{4}{L} F \quad \leftarrow \text{charge par unité d'aire du patin.}$$

$$G = - \frac{4}{0,3} \cdot 1,2 \times 10^5 = -1,6 \times 10^6 \text{ Pa m}^{-1}$$

$$\varphi = - \frac{G l h^3}{12 \eta}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi}{l} = - \frac{G h^3}{12 \eta} = \frac{1,6 \times 10^6 (4 \times 10^{-5})^3}{12 \times 0,3}$$

$$= 2,8 \times 10^{-8} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$= 2,8 \times 10^{-2} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\boxed{\frac{\varphi}{l} = 1,7 \text{ cm}^3 \text{ mn}^{-1} \text{ m}^{-1}}$$