Paris 7
PH 402
2002–03

Physique Statistique

EXERCICES
Feuille 8 : Statistiques quantiques

---

1 **Mis en examen** (mai 1995)

On se propose d'établir quelques prédictions du modèle du gaz parfait concernant le comportement des pions, des quarks et des gluons à haute température.

Les questions préliminaires, indépendantes, ont pour but de retrouver des résultats élémentaires, donc fondamentaux, déjà exposés en cours et nécessaires pour la suite. Les questions suivantes deviennent plus ardues. Les calculs sont toujours simples ; les raisonnements aussi, encore que parfois subtils.

Conseils :

- Soyez économe de votre temps. Songez qu'il est inutile de répéter l'analogue d'un calcul déjà effectué lors d'une question précédente.
- Par contre, tout bref commentaire justificatif ou explicatif d'une formule invoquée sera apprécié, plutôt que d'asséner celle-ci brutalement. Montrez que vous en maîtrisez les tenants aussi bien que les aboutissants.
- Enfin, vous pouvez profiter des valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x^3}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15},$$
$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x^3}{e^x+1} = \frac{7\pi^4}{120} = \frac{7}{8}\,\frac{\pi^4}{15}.$$

Préliminaires

1. Calculer la densité d'états $\rho(\varepsilon)$ d'une particule de spin zéro, de masse nulle et d'énergie ε, autrement dit une particule ultra relativiste (encore autrement dit, une particule pour laquelle la relation entre énergie et impulsion est $\varepsilon = |\mathbf{p}|c$), "libre" dans une boîte de volume $\mathcal{V}$.

2. *i*) Rappeler la définition de l'entropie en physique statistique.

ii) Calculer l'entropie S d'un système de particules identiques en situation grand canonique (réservoir de température T et potentiel chimique μ). Exprimer cette entropie en fonction de T, μ (bien sûr), de l'énergie moyenne $\overline{E}$, du nombre moyen de particules $\overline{N}$ et du grand potentiel J du système.

iii) En déduire, dans la limite thermodynamique, l'expression de J en fonction de T, μ, E, S et N, puis en fonction de μ, N et de l'énergie libre F.

iv) Rappeler l'expression de la différentielle de l'énergie d'un fluide simple en thermodynamique. En déduire l'expression de la pression du fluide sous forme d'une dérivée partielle du grand potentiel, en précisant bien les variables indépendantes maintenues constantes. En déduire l'expression du grand potentiel en fonction de la pression et du volume.

3. Pour un gaz parfait de bosons identiques, de spin et de masse nuls, dans un volume $\mathcal{V}$, en présence d'un réservoir de chaleur et de particules, dont la température est T et le potentiel chimique nul :

i) Calculer l'énergie moyenne $\overline{E}_0$.

ii) Montrer que le grand potentiel J_0 est proportionnel à $\overline{E}_0$.

iii) Calculer la pression p_0.

iv) Calculer l'entropie, et enfin l'entropie par unité de volume s_0.

Gaz de pions

Les mésons π, ou pions, sont des bosons de spin zéro qui existent en trois types, de masses voisines (de l'ordre de 140 MeV), se distinguant par leur charge électrique : π^+, π^0 et π^-.

4. Les pions sont susceptibles, s'ils en ont l'énergie, de participer à quantités de réactions de création et d'annihilation, expérimentalement avérées, et qui toutes conservent la charge électrique. Pour n'en citer que deux :

$$\pi^+ + \pi^- \longrightarrow 2\pi^+ + 2\pi^- + 2\pi^0 \quad ,$$
$$\pi^+ + \pi^- \longrightarrow 3\pi^+ + 3\pi^- + 2\pi^0 \quad ,$$

i) D'après ce que vous connaissez des lois des équilibres chimiques, quelles conditions en déduisez-vous pour les potentiels chimiques μ_0, μ_+ et μ_- d'un gaz de pions à l'équilibre ?

ii) Quelles sont les expressions intégrales des nombres moyens $\overline{N}_+$ et $\overline{N}_-$ des pions π^+ et π^- dans un gaz de pions à l'équilibre avec un réservoir de chaleur (température T, ou β), et de particules π^+ et π^- (potentiels chimiques μ_+ et μ_-) ?

iii) En déduire qu'un gaz de pions globalement neutre a nécessairement les potentiels chimiques $\mu_0 = \mu_+ = \mu_- = 0$.

Dans les conditions de température qui nous intéressent, on peut se permettre de négliger :
- la masse du pion ;
- les interactions mutuelles (forte et électromagnétique) des particules.

On étudie donc dorénavant un gaz de pions globalement neutre que l'on pourra considérer comme un gaz parfait ultra-relativiste de bosons de trois types.

5. Montrer que l'énergie moyenne $\overline{E}_\pi(T, \mathcal{V})$ du gaz de pions en situation grand canonique peut s'écrire $\overline{E}_\pi = d_\pi \, \overline{E}_0$, où :
- d_π est un *facteur de dégénérescence*, spécifique des pions, dont vous donnerez la valeur ;
- $\overline{E}_0(T, \mathcal{V})$ est l'énergie moyenne d'un gaz parfait de bosons identiques, de spin et de masse nuls (dans les mêmes conditions de température, de potentiel chimique, et de volume).

6. Etablir l'expression intégrale du grand potentiel J_π, et montrer que celui-ci est proportionnel à $\overline{E}_\pi$. Calculer la pression p_π du gaz de pions, et l'exprimer en fonction de la pression $p_0(T)$ du gaz de bosons identiques.

7. Montrer que l'entropie du gaz de pions peut s'exprimer en termes de $\overline{E}_\pi$ et T uniquement. En déduire l'expression de l'entropie par unité de volume, s_π, en fonction de l'entropie par unité de volume $s_0(T)$ du gaz de bosons identiques.

8. Subtil : Montrer que l'approximation classique de Maxwell-Boltzmann n'est jamais valide pour le gaz de pions.

Gaz de fermions ultra-relativistes

On considère maintenant un gaz de fermions de spin 1/2. A haute température, ce gaz contient en général des particules et des antiparticules, disons des électrons e^- et des positrons e^+, susceptibles elles aussi de participer à des réactions de création et d'annihilation conservant toujours la charge ; par exemple :

$$e^- + e^+ \longrightarrow 2e^- + 2e^+ \quad .$$

9. *i*) Quelle condition doivent satisfaire les potentiels chimiques μ_- et μ_+ des électrons et positrons de ce gaz à l'équilibre ?

ii) Quelles sont les expressions intégrales des nombres moyens d'électrons et de positrons, $\overline{N}_-$ et $\overline{N}_+$, dans ce gaz en équilibre avec un réservoir de chaleur, d'électrons et de positrons (température β, potentiels chimiques μ_- et μ_+ respectivement).

iii) En déduire que pour un gaz de fermions-antifermions, neutre, à l'équilibre, on a : $\mu_- = \mu_+ = 0$.

10. On n'envisage dorénavant ce gaz que dans le cas ultra relativiste.

i) Calculer l'énergie moyenne grand canonique $\overline{E}_f(T, \mathcal{V})$ du gaz neutre de fermions.

ii) Montrer que cette énergie peut encore se mettre sous la forme $\overline{E}_f = d_f \, f \, \overline{E}_0$, où :
- f est un facteur à déterminer qui provient uniquement du fait que l'on a affaire à des particules obéissant à la statistique de Fermi plutôt que celle de Bose-Einstein,
- d_f est un facteur de dégénérescence, à déterminer, lié au spin et au nombre de types de l'espèce de particules considérée,
- $\overline{E}_0(T, \mathcal{V})$ est l'énergie du gaz de bosons identiques déterminée précédemment.

11. Comme auparavant, exprimer le grand potentiel J_f en fonction de $\overline{E}_f$, et en déduire la pression p_f ainsi que l'entropie par unité de volume s_f, en fonction de p_0 et s_0 respectivement.

Transition au plasma quarks-gluons

On se demande maintenant ce que le modèle du gaz parfait peut dire d'un gaz de quarks et de gluons ultra-relativistes obtenus à partir d'un gaz de pions globalement neutre.

12. *i*) Le spin du gluon vaut 1 et sa masse est nulle, en vertu de quoi le gluon, comme le photon, ne dispose que de deux états de polarisation indépendants, mais il peut néanmoins exister sous huit combinaisons de couleurs. D'autre part, la charge électrique du gluon est nulle et il n'obéit à aucune loi de conservation du nombre de gluons. Calculer la pression p_g d'un gaz parfait de gluons.

ii) Les quarks constituants du pion sont des fermions chargés de spin 1/2, existant en deux saveurs, u (charge 2/3) ou d (charge $-1/3$), ou leurs conjuguées, $\overline{u}$ et $\overline{d}$, et en trois couleurs. Ces quarks ont une masse faible (de l'ordre de 10 MeV). Calculer la pression p_q du gaz parfait de quarks obtenus par dissociation d'un gaz de pions neutre.

iii) Empiriquement, on sait qu'à faible distance l'interaction mutuelle des quarks et gluons s'annule (liberté asymptotique), ce qui justifie le recours au modèle du gaz parfait. Mais on sait aussi que cette interaction confine les quarks et gluons (on n'est jamais parvenu à isoler un quark), ce dont on peut tenir compte phénoménologiquement en attribuant au vide (dans lequel se meuvent quarks et gluons) une énergie proportionnelle à son volume, soit $B\mathcal{V}$. Calculer la "pression du vide" p_v.

13. En déduire l'expression de la pression totale $p_{q,g}$ d'un plasma quarks-gluons globalement neutre, et représenter l'allure des courbes $p_\pi(T)$ et $p_{q,g}(T)$ sur un même graphe.

14. *i*) À l'aide des relations générales entre pression, volume, grand potentiel, énergie libre, potentiel chimique et nombre de particules, exprimer l'énergie libre F_π du gaz de pions neutre en fonction de sa pression p_π et de son volume, et de même pour l'énergie libre $F_{q,g}$ du plasma quarks-gluons neutre en fonction de $p_{q,g}$ et $\mathcal{V}$.

ii) En déduire que l'ensemble neutre de pions, de quarks et de gluons existe sous deux phases stables distinctes, de part et d'autre d'une température de transition T_c à déterminer.

iii) Comparer les entropies par unité de volume $s_\pi(T_c)$ et $s_{q,g}(T_c)$. En déduire l'ordre de la transition de phase et sa chaleur latente.

Feuille 8 — Plasma quarks-gluons ?

(1) $s = 0$ $\quad \Omega(\vec{k}, d^3k) = \frac{dk_x}{2\pi/L_x}\,\frac{dk_y}{\cdots}\cdots = \frac{V}{(2\pi)^3}\,k^2\,dk\,d^2\hat{k}$

$$\Omega(k, dk) = \frac{V}{2\pi^2}\,k^2\,dk$$

$\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, $\quad p = \hbar k$, $\quad m = 0$ $\Big\} \longrightarrow k = \frac{\varepsilon}{\hbar c}$

$$\Omega(\varepsilon, d\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\,\frac{1}{(\hbar c)^3}\,\varepsilon^2\,d\varepsilon$$

$$\boxed{\rho(\varepsilon) = A V \varepsilon^2} \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{1}{(\hbar c)^3}$$

(2) i) $\boxed{S \hat{=} -k \sum_\ell P_\ell \log P_\ell}$

ii) $(T,\mu) \Longrightarrow P_\ell \propto e^{-\beta(E_\ell - \mu N_\ell)}$; $\quad P_\ell = \frac{e^{-\beta(E_\ell - \mu N_\ell)}}{\Xi}$

$\Rightarrow S = -k \sum_\ell P_\ell \left[-\beta(E_\ell - \mu N_\ell) - \log \Xi\right]$

Grand potentiel : $\quad J \hat{=} -\frac{1}{\beta}\log \Xi = -kT \log \Xi$

$\Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{T}\left(\bar{E} - \mu \bar{N} - J\right)}$

iii) Limite thermodynamique : fluctuations négligeables, variables macroscopiques quasi certaines, $\quad E \simeq \bar{E}$, $N \simeq \bar{N}$

$$\boxed{J = E - TS - \mu N}$$

Énergie libre : $\quad F = E - TS \quad \Longrightarrow \quad \boxed{J = F - \mu N}$

iv) Fluide simple (1 composant, 1 seule phase) :

$dE = \delta Q + \delta W$

$$\boxed{dE = T\,dS - p\,dV + \mu\,dN}$$

$dJ = -S\,dT - p\,dV - N\,d\mu \quad \Longrightarrow \quad J(\underbrace{T, \mu, V}_{\substack{\text{pratiques,} \\ \text{+ contrôlables que} \\ E \text{ ou } S, \ldots}})$

$\Rightarrow \boxed{p = -\left(\frac{\partial J}{\partial V}\right)_{T,\mu}}$

$p(T, \mu, V)$ — p : intensif ; T, μ : intensif ; V : extensif $\quad \Longrightarrow \quad p(T, \mu, \cancel{V})$

$$\boxed{J(T, \mu, V) = -p(T, \mu)\,V}$$

(3) Bosons : $\Xi = \sum_L e^{-\beta(E_L - \mu N_L)} = \prod_\lambda \sum_{n_\lambda} e^{-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu) n_\lambda}$

$$\xi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)}\right]^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)}} \qquad \mu < \varepsilon_0$$

$$\overline{N_\lambda} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \xi = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} - 1}$$

Masse nulle $\Rightarrow$ $\varepsilon_0 = 0$

$\mu = 0$? Pas de problème, μ infinitésimal < 0

si $T > T_B \leftarrow$ temp. de condensation de Bose Einstein

certain si utilisé comme approximation ultra-relativiste pour un gaz de bosons massifs $m \ll kT$.

i) $\overline{E} = \sum_\lambda \overline{N_\lambda}\, \varepsilon_\lambda = \sum_{(\varepsilon, d\varepsilon)} \Omega(\varepsilon, d\varepsilon) \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \sim \int_0^\infty d\varepsilon\, \rho(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$

$$\overline{E}_0(T, V) = \overline{E}(T, \mu=0, V) = AV \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = AV \beta^{-4} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}$$

$$= AV (kT)^4 \frac{\pi^4}{15} \Rightarrow \boxed{\overline{E}_0(T, V) = \frac{\pi^2}{30} \frac{V}{(\hbar c)^3} (kT)^4}$$

ii) $J = -\frac{1}{\beta} \log \Xi = -\frac{1}{\beta} \sum_\lambda \log \xi_\lambda$

$$J_0(T, V) = J(T, \mu=0, V) = -\frac{1}{\beta} AV \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon^2 (-) \log\left[1 - e^{-\beta\varepsilon}\right]$$

$$= AV \beta^{-1} \int_0^\infty d\varepsilon \left\{ \frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{1}{3}\varepsilon^3 \log(1 - e^{-\beta\varepsilon})\right] - \frac{1}{3}\varepsilon^3 \frac{\beta e^{-\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} \right\}$$

$$= AV \left(-\frac{1}{3}\right) \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \Rightarrow \boxed{J_0 = -\frac{1}{3} \overline{E}_0}$$

iii) $p = -\frac{\partial J}{\partial V}$

$$\xrightarrow{\mu=0} p_0 = -\frac{\partial J_0}{\partial V} = \frac{1}{3} \frac{\partial \overline{E}_0}{\partial V} \Rightarrow \boxed{p_0(T) = \frac{\pi^2}{90} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}}$$

iv) $S = \frac{1}{T}(\overline{E} - \mu \overline{N} - J)$

$$\mu = 0 \Rightarrow S_0 = \frac{1}{T}(\overline{E}_0 - J_0) = \frac{4}{3} \frac{\overline{E}_0}{T} \Rightarrow \boxed{S_0(T, V) = \frac{2\pi^2}{45} \frac{V}{(\hbar c)^3} k^4 T^3}$$

$$\boxed{s_0(T) = \frac{2\pi^2}{45} k \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3}$$

(4) i) Si énergie suffisante, $\exists$ réactions (par ex.)

$\pi^+ + \pi^- \rightleftharpoons 2\pi^+ + 2\pi^- + 2\pi^0 \Rightarrow$ à l'équilibre : $\mu_+ + \mu_- = 2\mu_+ + 2\mu_- + 2\mu_0$

$\pi^+ + \pi^- \rightleftharpoons 3\pi^+ + 3\pi^- + 2\pi^0$ $\qquad \mu_+ + \mu_- = 3\mu_+ + 3\mu_- + 2\mu_0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mu_0 &= 0 \\ \mu_+ + \mu_- &= 0 \end{aligned}}$$

ii) Réservoir (T, μ_+, μ_-)

$$\boxed{\overline{N_\pm} = \int_{m_\pi c^2}^{\infty} d\varepsilon \; \rho(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu_\pm)} - 1}}$$

iii) Neutralité thermod. $\Longrightarrow N_+ = N_- \Longrightarrow \mu_+ = \mu_-$

$\mu_+ + \mu_- = 0$ $\Big\} \Longrightarrow \boxed{\mu_0 = \mu_\pm = 0}$

⑤ Gaz de pions ultra relativistes, $m_\pi c^2 \ll kT$.

Potentiels chimiques nuls : $\mu_0 = \mu_\pm = 0 < \varepsilon_0 = m_\pi c^2 \ll kT$

$$\overline{E}_{\pi^0} = \overline{E}_{\pi^+} = \overline{E}_{\pi^-} \sim \int_0^\infty d\varepsilon \; \rho(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = \overline{E}_0$$

$$\overline{E}_\pi = \overline{E}_{\pi^0} + \overline{E}_{\pi^+} + \overline{E}_{\pi^-} \Longrightarrow \boxed{\overline{E}_\pi = 3\,\overline{E}_0} = d_\pi \, \overline{E}_0$$

3 états de pions $\vec{k}$

⑥ Gaz parfait (particules indépendantes) :

$$\Xi_\pi = \Xi_{\pi^0} \, \Xi_{\pi^+} \, \Xi_{\pi^-}$$

$$J_\pi = J_{\pi^0} + J_{\pi^+} + J_{\pi^-} \text{ , avec } J_{\pi^0} = J_{\pi^+} = J_{\pi^-} \sim \frac{1}{\beta}\int_0^\infty d\varepsilon \, \rho(\varepsilon) \log(1 - e^{-\beta\varepsilon}) = J_0$$

$$J_\pi = 3 J_0 = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\overline{E}_0\right)$$

$$\boxed{J_\pi = -\frac{1}{3}\overline{E}_\pi}$$

$$p_\pi = -\left(\frac{\partial J_\pi}{\partial V}\right) = \frac{1}{3}\frac{\partial \overline{E}_\pi}{\partial V} = d_\pi \frac{1}{3}\frac{\partial \overline{E}_0}{\partial V} = d_\pi \, p_0$$

$\boxed{p_\pi = 3 p_0}$ (connu : la pression est la somme des pressions partielles)

⑦ Particules indépendantes ; additivité des $S_i = \frac{1}{T}(\overline{E}_i - \underbrace{\mu_i}_{=0} \overline{N}_i - J_i)$

$$\Rightarrow S_\pi = \sum_i S_i = \frac{1}{T}(\overline{E}_\pi - J_\pi)$$

$$\boxed{S_\pi = \frac{4}{3}\frac{\overline{E}_\pi}{T}} = 3\, S_0$$

$$\boxed{s_\pi = 3 s_0} \Longrightarrow s_\pi(T) = \frac{2\pi^2}{15} k \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3$$

⑧ Approximation classique valide si $\overline{N}_\varepsilon = \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \ll 1$

$\Rightarrow e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \gg 1 \quad \forall \varepsilon \geq \varepsilon_0 = m_\pi c^2$

Ici, $\mu = 0 \Rightarrow e^{\frac{m_\pi c^2}{kT}} \gg 1$

Impossible pour un gaz ultra relativiste $kT \gg m_\pi c^2$

$\Longrightarrow$ pas d'approximation classique.

(9) i) À énergie suffisante, $\exists$ par exemple

$$e^- + e^+ \rightleftharpoons 2e^- + 2e^+$$

À l'équilibre : $\mu_- + \mu_+ = 2\mu_- + 2\mu_+$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_- + \mu_+ = 0}$$

ii) $$\boxed{\overline{N_\pm} = \int_{m_e c^2} d\varepsilon \; \underset{2s+1}{2}\; \underset{\text{boson } \begin{cases} s=0 \\ m_e \end{cases}}{\rho(\varepsilon)} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu_\pm)}+1}}$$

iii) Gaz neutre :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{N_+} = \overline{N_-} \Rightarrow \mu_+ = \mu_- \\ \text{équilibre} \quad \mu_+ + \mu_- = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mu_+ = \mu_- = 0}$$

(10) En ultra relativiste, $\beta m_\pi c^2 \ll 1$

i) $\overline{E_f} = \overline{E_{e^-}} + \overline{E_{e^+}}$

$$\mu_- = 0 \Rightarrow \overline{E_{e^-}} = \underset{2s+1}{2} \int_0^\infty d\varepsilon \; \underset{\text{boson } \begin{cases} s=0 \\ m=0 \end{cases}}{\rho(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}+1} = 2AV \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon}+1}$$

$$\overline{E_{e^-}} = 2AV\beta^{-4} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x+1}}_{\frac{7}{8}\frac{\pi^4}{15}} = 2\,\frac{7}{8}\, AV\beta^{-4}\frac{\pi^4}{15} = 2\times\frac{7}{8}\,\overline{E_0}$$

$$\boxed{\overline{E_f} = 2\times 2\times\frac{7}{8}\,\overline{E_0}} = \frac{7\pi^2}{60}\frac{V}{(\hbar c)^3}(kT)^4$$

ii) $$\boxed{\overline{E_f} = d_f \, f \, \overline{E_0}}$$

- facteur de dégénérescence : $\boxed{d_f = \underset{\text{états de spin}}{2} \times \underset{\text{états de charge}}{2}}$

- facteur statistique : $\boxed{f = \begin{cases} 1 & \text{bosons} \\ \frac{7}{8} & \text{fermions} \end{cases}}$

$\Rightarrow$ pour un gaz parf. ultrarelativiste,
la statistique est tj. quantique (pas d'approx classique),
mais bosons ou fermions ça ne change pas beaucoup !

(11) $J = -\frac{1}{\beta} \log \Xi = -\frac{1}{\beta} \sum_\lambda \log \xi_\lambda$

avec (fermions) $\xi_\lambda = \sum_{n=0}^{1} e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)n} = 1+e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}$

Ici, $\mu_+ = \mu_- = 0$:

$$J_{e^-} \underset{\substack{\text{ultra rel.}\\ kT \gg m_e c^2}}{\sim} -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty d\varepsilon \; \underset{2s+1}{2}\, \rho(\varepsilon) \log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

$\rho(\varepsilon)$: boson $\begin{cases} s=0 \\ m=0 \end{cases}$

$$J_{e^-} = -\frac{1}{\beta}\, 2 A V \int_0^\infty d\varepsilon\; \varepsilon^2 \log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

$$= -\frac{1}{\beta}\, 2AV \int_0^\infty d\varepsilon \left\{ \frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{1}{3}\varepsilon^3 \log(1+e^{-\beta\varepsilon})\right] - \frac{1}{3}\varepsilon^3 \frac{-\beta e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}} \right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\, 2AV \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon}+1} = -\frac{1}{3}\overline{E}_{e^-}$$

Et de même pour les e^+.

Indépendants $\Rightarrow$ $J_f = J_{e^-} + J_{e^+} = -\frac{1}{3}\left(\overline{E}_{e^-} + \overline{E}_{e^+}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{J_f = -\frac{1}{3}\overline{E}_f}$$

Pression : $p_f = -\frac{\partial J_f}{\partial V} = \frac{1}{3}\frac{\partial \overline{E}_f}{\partial V} = d_f\, f\, \frac{1}{3}\frac{\partial \overline{E}_0}{\partial V}$

$$\Rightarrow \boxed{p_f = d_f\, f\, p_0} = 2 \times 2 \times \frac{7}{8}\, p_0 = \frac{7}{2}\, p_0$$

Entropie : $S_f = -\frac{\partial J_f}{\partial T} = \frac{1}{3}\frac{\partial \overline{E}_f}{\partial T} = d_f\, f \frac{1}{3}\frac{\partial \overline{E}_0}{\partial T} = d_f\, f\, (-)\frac{\partial J_0}{\partial T}$

$$\Rightarrow \boxed{S_f = d_f\, f\, S_0} = \frac{7}{2}\, S_0$$

$$\boxed{s_f = d_f\, f\, s_0} = \frac{7}{2}\, s_0$$

(12) i) Pas de conservation du nombre de gluons (comme les photons, ou les pions, leptons ... ultrarelativistes) $\Rightarrow \mu_g = 0$

On a vu $p_\pi = 3\, p_0 = \underset{\text{3 états de charge}}{d_\pi}\; \underset{1 \text{ (bosons)}}{f}\; p_0$

De même pour les gluons :

$$p_g = d_g\, \underset{1}{f}\, p_0 \,, \quad \text{avec } d_g = \underset{\text{états de "spin"}}{2} \times \underset{\text{couleurs}}{8}$$

(pas d'explication élémentaire, cf rayt classique, transversi $\Rightarrow$ 2 états de polar indép.)

$$\boxed{p_g = 16\, p_0}$$

ii) Quarks ultra relativistes ($m_q \simeq 10\,\text{MeV}$) $\Longrightarrow \mu_q = 0$

$$p_q = d_q \underbrace{f}_{7/8} p_0 \quad \text{, avec } d_q = \underbrace{2}_{\text{spins}} \times \underbrace{2}_{\text{saveurs}} \times \underbrace{2}_{\text{conjugaison}} \times \underbrace{3}_{\text{couleurs}}$$

$$\boxed{p_q = 21\, p_0}$$

iii) "vide" : $E_v = B\,\mathcal{V}$

$$dE_v = B\, d\mathcal{V}$$

($dE = \cancel{TdS} - p\, d\mathcal{V}$) $\Longrightarrow$ pression $\boxed{p_v = -B}$

Pour confiner il faut une pression négative (pression ordinaire > 0 exige des parois pour le confinement du gaz)

(13) gluons + quarks confinés ;

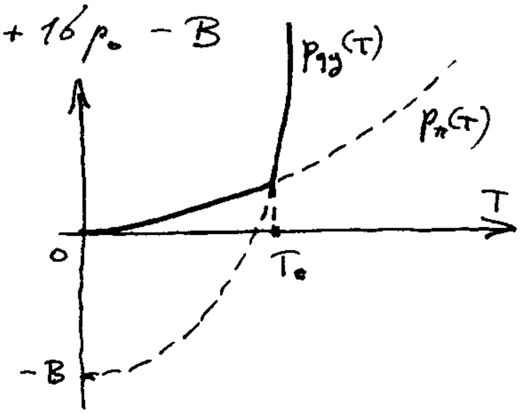
pression = Σ pressions partielles

$$p_{qg} = p_q + p_g + p_v = 21\, p_0 + 16\, p_0 - B$$

$$\boxed{p_{qg} = 37\, p_0 - B}$$

$$p_{qg}(T) = 37\, \frac{\pi^2}{90}\, \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} - B$$

$$p_\pi(T) = 3\, \frac{\pi^2}{90}\, \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}$$



(14) i) $S = \frac{1}{T}\left(E - \sum_i \mu_i N_i - J\right)$

$$\Longrightarrow \underbrace{E - TS}_{F} - \sum_i \underbrace{\mu_i}_{0} N_i = \underbrace{J}_{-p\mathcal{V}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} F_\pi &= -p_\pi \mathcal{V} \\ F_{qg} &= -p_{qg} \mathcal{V} \end{aligned}}$$

ii) à T fixée, relaxation d'une contrainte (par ex. permettre aux π de se convertir en q, g)

$\Longrightarrow$ évolution spontanée dans le sens $F \searrow$ (car $F = E - TS$ et $S \nearrow$)

$\longrightarrow$ état d'équilibre stable F mini

$F = -pV \Rightarrow$ équilibre stable à p maxi

Courbes $p_\pi(T)$ et $p_{qg}(T) \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{ll} T < T_c & \text{phase } \pi \\ T > T_c & \text{phase } qg \end{array}}$$

avec T_c t.q.
$$p_\pi(T_c) = p_{qg}(T_c)$$
$$3p_0(T_c) = 37\, p_0(T_c) - B$$
$$34 \frac{\pi^2}{90} \frac{(kT_c)^4}{(\hbar c)^3} = B$$
$$\boxed{kT_c = \left(\frac{45}{17\pi^2}\right)^{1/4} (\hbar c)^{3/4}\, B^{1/4}}$$

iii) $s_\pi = 3\, s_0$

$s_{qg} = s_q + s_g = 21\, s_0 + 16\, s_0 = 37\, s_0$

$\Rightarrow$ discontinuité d'entropie lors du passage (à T_c) de la phase π à la phase qg

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{transition de phase du 1}^{\text{er}}\text{ ordre}}$

Chaleur latente (par unité de volume) :

$$\ell_{\pi\to qg} = T_c\, \Delta s = T_c\,(s_{qg} - s_\pi) = T_c\,(37\, s_0 - 3\, s_0)$$
$$= 34\; T_c\, s_0(T_c) = 34\, \frac{2\pi^2}{45} \frac{(kT_c)^4}{(\hbar c)^3} = \frac{2}{45} \cdot 90\, B$$

$$\boxed{\ell_{\pi\to qg} = 4B}$$