

# RELATIVITES

L6 — EXAMEN

$t_0 = 21 \text{ juin } 1995, 9 \text{ h},$

$\Delta t = 3 \text{ h}.$

Documents manuscrits et calculette autorisés.

La logorrhée hâtivement rédigée qui suit peut comporter des erreurs et même des fautes de goût que vous me pardonneriez, je l'espère. Nonobstant le ton d'aspect comminatoire de certaines questions qui traduit mon souci de vous guider vers ce que j'ai la faiblesse de croire leur résolution la plus simple, vous êtes parfaitement libre de préférer toute autre méthode. Enfin, il ne sera pas nécessaire de répondre à *toutes* les questions pour obtenir une note plus qu'honorable.

A.L.

### Quelques données naturelles :

La constante de la théorie de la relativité	$c \approx 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
La constante de la gravitation	$G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
La masse du Soleil	$M_{\odot} \approx 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Le rayon du Soleil	$R_{\odot} \approx 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
La distance moyenne Terre–Soleil	$r_{\oplus} \approx 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$
La distance moyenne Mercure–Soleil	$r_{\text{♁}} \approx 5,55 \times 10^{10} \text{ m}$
L'accélération de la pesanteur sur Terre	$g \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$

## I. LA FICELLE DE BELL

### Prologue

1. Sur un graphe d'espace-temps  $(x, t)$  dans un repère inertiel, représentez l'allure de la ligne d'univers d'une voyageuse en accélération propre constante  $a$ , en indiquant les caractéristiques graphiques de cette ligne d'univers.
2. Soit un événement  $A$  dans la vie de la voyageuse. Représentez la ligne d'univers du personnage inerte qui a, en  $A$ , une vitesse nulle par rapport à la voyageuse.
3. Représentez l'ensemble des événements qui, pour ce personnage, sont simultanés avec l'événement  $A$ . (Cette question mérite un peu de soin ; vous pouvez argumenter qualitativement votre réponse ou, sinon, déterminer effectivement cet ensemble par le calcul.)

### Un scénario unidimensionnel

Brünnhilde, Sieglinde et Siegmund sont tous trois inertes et immobiles les uns par rapport aux autres. Ils sont alignés, et Brünnhilde est à mi-chemin entre Sieglinde et Siegmund. Une ficelle est tendue entre Sieglinde et Siegmund.

Nos trois héros sont convenus depuis longtemps que lorsque Sieglinde et Siegmund reçoivent un signal radio de Brünnhilde, ils doivent tous deux prendre la fuite dans ce qui était antérieurement la *direction de la ficelle*, dans le *même sens* (disons de Sieglinde vers Siegmund), en mettant en route leurs moteurs respectifs à *même accélération propre constante*. Toute la question est maintenant de prédire le dénouement (si l'on peut dire) pour le lien qui unit Sieglinde et Siegmund : la ficelle va-t-elle rester tendue, se détendre, ou casser...

4. Représenter tout ce scénario sur un graphe d'espace-temps dans le repère de Brünnhilde : lignes d'univers, signaux radio (mais pas la ficelle qui a vraiment trop de points et dont on ne sait pas encore grand chose).
5. Soit un événement  $A$  de Sieglinde en fuite.
  - i*) Représentez la ligne d'univers de Bell, inerte, qui a en  $A$  une vitesse nulle par rapport à Sieglinde.
  - ii*) Représentez l'ensemble des événements qui, pour Bell, sont simultanés avec  $A$ .
  - iii*) Représentez l'événement  $B$  de Siegmund qui, pour Bell, est simultané avec  $A$ .
  - iv*) Représentez la ligne d'univers de Richard qui, en  $B$ , a une vitesse nulle par rapport à Siegmund.
6. A l'aide du graphique ainsi construit...
  - i*) Comparez les vitesses de Bell et de Richard.
  - ii*) Qu'en déduisez-vous pour la vitesse de Richard par rapport à Bell, et pour le sort de la ficelle ?

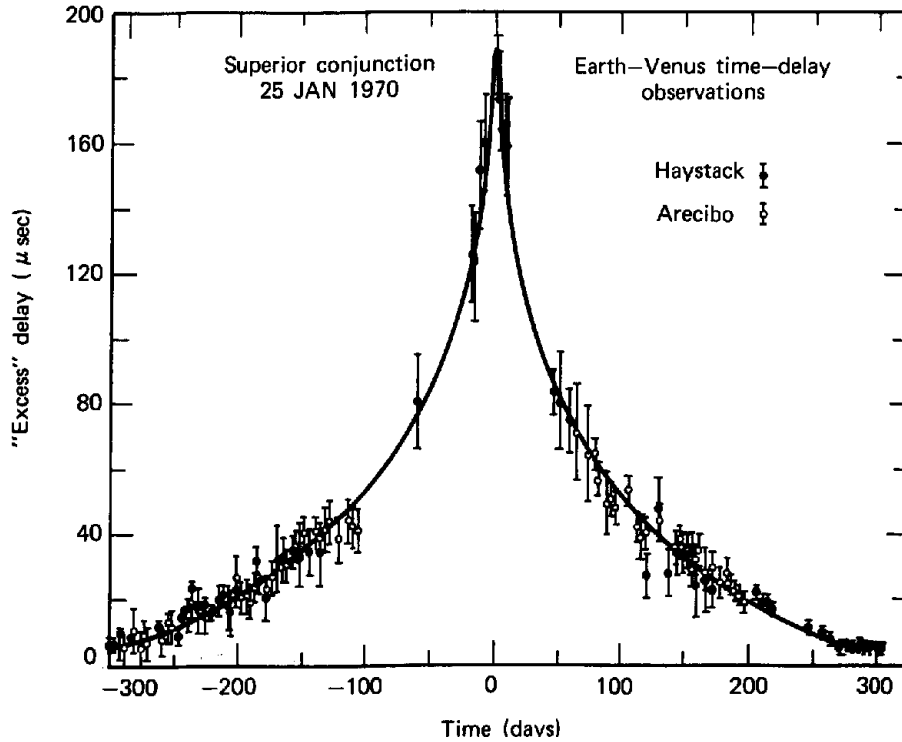
Réf. :

J.S. BELL, *How to teach special relativity*, in *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press (1987), p. 67.

## II. RETARD D'UN ECHO RADAR

Je nous propose d'évaluer le temps mis par un signal radar émis de la Terre pour se réfléchir sur Mercure et retourner à la Terre, sous l'influence du Soleil et en négligeant les influences et les vitesses de la Terre et de Mercure.

1. Rappelez les expressions des équations du mouvement pour les composantes de l'impulsion d'une particule de masse  $m$  en chute libre, dans la base des coordonnées de Schwarzschild, en paramétrisation affine  $\lambda$  t.q.  $dx^\alpha/d\lambda \stackrel{\text{df}}{=} p^\alpha$ , en termes des constantes du mouvement  $J$  et  $E$ . (Bien entendu, vous pouvez choisir le plan de la trajectoire comme plan équatorial  $\vartheta = \pi/2$ .)
2. En déduire l'expression de  $dt/d\lambda$ , puis l'expression de  $(dr/dt)^2$  dans le cas d'une particule de masse nulle, disons un photon.
3. Etablissez la relation entre la "distance minimale d'approche"  $r_0$  (plus précisément la valeur minimale de la coordonnée  $r$  du photon), le rayon de Schwarzschild  $r_g$ , et le rapport  $J/E$  des constantes du mouvement.
4. En déduire l'expression de  $dr/dt$  du photon en termes de  $r$ ,  $r_g$  et  $r_0$ .
5. En déduire l'expression intégrale donnant le "temps"  $t(r, r_0)$  mis par le photon pour monter, le long de sa géodésique, de la valeur  $r_0$  à la valeur  $r$ .
6. Quels sont les ordres de grandeur des rapports  $r_g/r_0$ ,  $r_g/r$  et  $r_0/r$  dans l'expérience qui nous intéresse (Terre et Mercure en présence du Soleil)? En déduire une expression explicite approchée et pertinente de  $t(r, r_0)$ .
7. Quelle signification peut-on (vaguement) attribuer au terme additif  $\sqrt{r^2 - r_0^2}$  qui apparaît dans l'expression de  $t(r, r_0)$ ? Quelle est l'expression du "décalage de retard"  $\Delta t \stackrel{\text{df}}{=} t(r, r_0) - \sqrt{r^2 - r_0^2}$  subi par le photon?
8. Dans quelle situation relative doivent se trouver la Terre, Mercure et le Soleil pour que le décalage de retard de l'écho radar reçu sur Terre soit *maximum*?
9. Etablir l'expression approchée  $\Delta t_{\text{max}}$  du décalage correspondant à cette situation, et calculer sa valeur en kilomètres puis en microsecondes.
10. Les barres d'erreur importantes dont sont affectées les valeurs expérimentales ci-dessous ne laissent pas de surprendre car l'ordre de grandeur de  $\Delta t_{\text{max}}$  ne devrait poser aucun problème de mesure. D'où viennent les difficultés de l'analyse des données brutes?



Réfs :

I.I. SHAPIRO & al., *Fourth test of general relativity : New radar result*, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 1132.

S. WEINBERG, *Gravitation and cosmology*, Wiley (1972), §8.7.

### III. EN DEÇA DE L'HORIZON

Un corps céleste engendre un monde de Schwarzschild que l'on décrit en coordonnées du même, caractérisé par le rayon de Schwarzschild  $r_g$ .

Une source, immobile en  $(r_s > r_g, \vartheta_s, \varphi_s)$ , émet au "temps"  $t_s$  un signal lumineux verticalement vers le haut (dans la direction radiale, vers les  $r$  croissants).

1. Dédire directement de la formule métrique l'équation différentielle de la ligne d'univers de ce signal lumineux.
2. Calculer le temps  $t_o$  auquel une observatrice, immobile en  $(r_o > r_s, \vartheta_o = \vartheta_s, \varphi_o = \varphi_s)$ , reçoit le signal.
3. En déduire l'existence d'une région de l'espace littéralement invisible pour l'observatrice, et limitée par un "horizon" que vous préciserez.
4. Quelle est la caractéristique de la métrique de Schwarzschild qui est responsable de l'existence de cet horizon ?
5. Vous pouvez légitimement vous interroger sur la signification de ce temps  $t_o$  pour l'observatrice puisqu'il est spécifique du système de coordonnées adopté,

totalelement arbitraire. L'observatrice dispose néanmoins, de son point de vue, d'un temps propre unique (à un choix d'unité près, opéré en toute légalité, et à un choix d'origine près), indépendant de tout système de coordonnées. Montrez à l'aide de la formule métrique que la coordonnée  $t$  de l'observatrice et son temps propre sont en correspondance affine.

#### IV. RÊVONS UN PEU, BEAUCOUP...

On envisage un espace de formule métrique

$$ds^2 \stackrel{\text{df}}{=} dt^2 - dl^2 - (b^2 + l^2)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2),$$

où les coordonnées ont pour domaines  $t \in ]-\infty, +\infty[$ ,  $l \in ]-\infty, +\infty[$ ,  $\vartheta \in [0, \pi[$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi[$ , et où  $b$  est une constante.

1. Décrivez, autant que faire se peut, les propriétés de cet espace :
  - i) A-t-il une structure d'espace-temps ?
  - ii) Intervalle de temps propre  $d\tau$  pour une observatrice immobile par rapport à ce système de coordonnées ?
  - iii) Symétries et signification des coordonnées ?
  - iv) Existence de régions asymptotiquement plates ?
  - v) Existence d'horizons ?
2. On considère le "plan équatorial"  $\vartheta_0 = \pi/2$ , au temps  $t_0$  fixé.
  - i) Ecrire la formule métrique  ${}^2ds^2$  de ce sous-espace. (Ça ne coûte rien de la choisir positive.)
  - ii) Pour visualiser la chose, on considère le plongement de ce sous-espace dans un espace euclidien à 3 dimensions. Rappeler la formule métrique  ${}^3ds^2$  de cet espace en coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$ . En déduire la formule métrique  ${}^2ds^2$  d'une surface  $z(r)$  dans cet espace.
  - iii) Cette surface est maintenant le sous-espace objet de notre sollicitude. Etablir la relation entre les coordonnées  $l$  et  $r$ . Etablir l'expression de  $z(r)$  et représenter sa courbe.
  - iv) Dessinez une vue perspective, dans l'espace euclidien 3d, de la surface représentative de notre mystérieux sous-espace, en portant toutes indications utiles (quelques courbes  $l = \text{cte.}$ , en particulier  $l = 0$ , des courbes  $\varphi = \text{cte.}$ , et les zones  $l \rightarrow \pm\infty$ ).
  - v) Peut-on imaginer que cet espace ne comporte qu'une seule région plate ?
3. Vous devriez être maintenant convaincu de la viabilité (littéralement !) de l'espace proposé, mais est-il réalisable ? Pour répondre à cette question, il faut déterminer le tenseur impulsion-énergie qui pourrait en être la source.
  - i) Expliquer la façon de procéder à ce calcul, en rappelant les formules utiles.

ii) Je vous offre les valeurs des symboles de Christoffel non nuls indépendants :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vartheta\vartheta}^l &= -l \quad , & \Gamma_{\varphi\varphi}^l &= -l \sin^2\vartheta \quad , \\ \Gamma_{l\vartheta}^\vartheta &= \frac{l}{b^2 + l^2} \quad , & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin\vartheta \cos\vartheta \quad , \\ \Gamma_{l\varphi}^\varphi &= \frac{l}{b^2 + l^2} \quad , & \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \frac{1}{\tan\vartheta} \quad . \end{aligned}$$

Montrez effectivement comment on calcule au moins l'une de ces valeurs.

iii) Même question pour les composantes du tenseur de Riemann non nulles, indépendantes :

$$R_{l\vartheta l\vartheta} = \frac{b^2}{b^2 + l^2} \quad , \quad R_{l\varphi l\varphi} = \frac{b^2}{b^2 + l^2} \sin^2\vartheta \quad , \quad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = -b^2 \sin^2\vartheta \quad .$$

iv) En déduire les valeurs des composantes non nulles du tenseur et du scalaire de Ricci.

v) En déduire les valeurs des composantes non nulles du tenseur impulsion-énergie qui engendre cet espace-temps.

vi) Tous ces calculs ont été effectués dans la base la plus commode pour cela, à savoir la base des coordonnées  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi)$ . Mais ces résultats étant obtenus, il existe, attachées au même événement, des bases plus éloquentes, correspondant à l'absence locale de gravité, autrement dit aux points de vue d'observatrices en chute libre, encore autrement dit à des tétrades orthonormées. Donnez, en fonction de  $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_\vartheta$  et  $\mathbf{e}_\varphi$ , les expressions des vecteurs de base  $\mathbf{e}_{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{l}}, \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}$ , et  $\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}$  de la tétrade orthonormée de l'observatrice Erda, en chute libre, qui a une vitesse nulle en cet événement (elle utilise, bien entendu, les directions de  $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_\vartheta$  et  $\mathbf{e}_\varphi$ ).

vii) En déduire les valeurs des composantes  $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  du tenseur impulsion-énergie dans cette base.

viii) L'interprétation du tenseur impulsion-énergie dépasse malheureusement un tout petit peu les quelques connaissances désordonnées que j'ai trouvé le temps de vous infliger. Disons quand même qu'en absence de gravité les composantes non nulles du tenseur impulsion-énergie d'une distribution de matière statique sont généralement, en coordonnées sphériques :

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r) \quad , \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = -\tau(r) \quad , \quad T_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = p(r) \quad ,$$

où  $\rho$  est la densité d'énergie,  $\tau$  la contrainte radiale (positive en extension, autrement dit l'opposé de la pression radiale), et  $p$  la pression tangentielle. En particulier, pour un fluide parfait on a  $\tau = -p$ , alors pour un champ électrique radial,  $\rho = \tau = p \propto E^2$ . Qu'avez-vous à dire sur la faisabilité de l'espace-temps étudié, dans l'état actuel de la science ?

4. Soit Wotan, voyageur en chute libre radiale dans cet espace-temps.

i) Montrez que Wotan se meut selon la ligne d'univers  $l = vt$ ,  $\vartheta = \text{cte.}$ ,  $\varphi = \text{cte.}$ , où  $v$  est une constante inférieure à 1.

ii) Soit un événement commun dans les vies de Wotan et d'Erda, tous deux en chute libre, mais Erda ayant alors une vitesse nulle par rapport aux coordonnées  $(t, l, \vartheta, \varphi)$ . Soit encore deux événements dans le voisinage, auxquels Erda et Wotan, ayant convenu d'une configuration standard, attribuent respectivement les intervalles de coordonnées  $(dt, dl, d\vartheta, d\varphi)$  et  $(dt', dl', d\vartheta', d\varphi')$ . Quelles sont les relations entre ces intervalles de coordonnées ?

iii) En déduire les expressions des vecteurs de base  $\mathbf{e}_{\hat{t}'}$ ,  $\mathbf{e}_{\hat{l}'}$ ,  $\mathbf{e}_{\hat{\vartheta}'}$  et  $\mathbf{e}_{\hat{\varphi}'}$  de la tétrade orthonormée de Wotan en fonction des vecteurs  $\mathbf{e}_{\hat{t}}$ ,  $\mathbf{e}_{\hat{l}}$ ,  $\mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}$  et  $\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}$  d'Erda.

5. Tout cela est bel et bon, mais seulement localement. Or, Wotan a une certaine extension spatiale et, quoique en chute libre en soi, ses extrémités sont soumises aux forces de marée dues à la non uniformité du champ de gravitation. Reste donc à vérifier la possibilité pour Wotan de voyager sans s'éclater ni s'écraser.

L'*accélération relative*, comme on dit, est la différence des contributions gravitationnelles aux accélérations de deux particules proches. Elle dépend évidemment du tenseur de courbure et de l'écart entre les deux particules. En fait, j'aurais dû prendre le temps de vous montrer qu'elle est tout simplement donnée par l'expression :

$$\Delta A^\alpha = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta} U^\beta \xi^\gamma U^\delta \quad ,$$

où les  $\xi^\alpha$  sont les écarts de coordonnées, et  $U^\alpha$  et  $\tau$  la quadri-vitesse et le temps propre de la particule de référence.

i) Rappelez les valeurs des composantes indépendantes non nulles  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  du tenseur de Riemann en base des coordonnées. En déduire les composantes  $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ , puis  $R_{\hat{\alpha}'\hat{\beta}'\hat{\gamma}'\hat{\delta}'}$ , sur les tétrades d'Erda puis Wotan.

ii) En déduire les composantes de l'accélération relative  $\Delta A^{\hat{\alpha}'}$  de deux points de Wotan dans la tétrade de Wotan, et montrez que celui-ci peut choisir son voyage en chute libre en sorte que les forces de marée soient aussi petites qu'il les désire.

Réf. :

M.S. MORRIS & K.S. THORNE, *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel : A tool for teaching general relativity*,  
Am. J. Phys. **56** (1988) 395.

Vérification des aptitudes et des connaissances

MIP

UV: L6 Relativité's

Date: 21 juin 1995

Note définitive :

N°

Nom: L A V E R N E

Prénom: A l e i n

Nom marital: A l e i n

Correcteurs

NOM :

Appréciations :

Modulo les erreurs de l'énoncé :

- une faute de frappe venielle

$$R_{\text{psld}} = \frac{b^2}{b^2 + l^2}$$

- deux capitales fautes d'orthographe :

Brünnhilde

..j'aurais dû prendre...

NOTE :

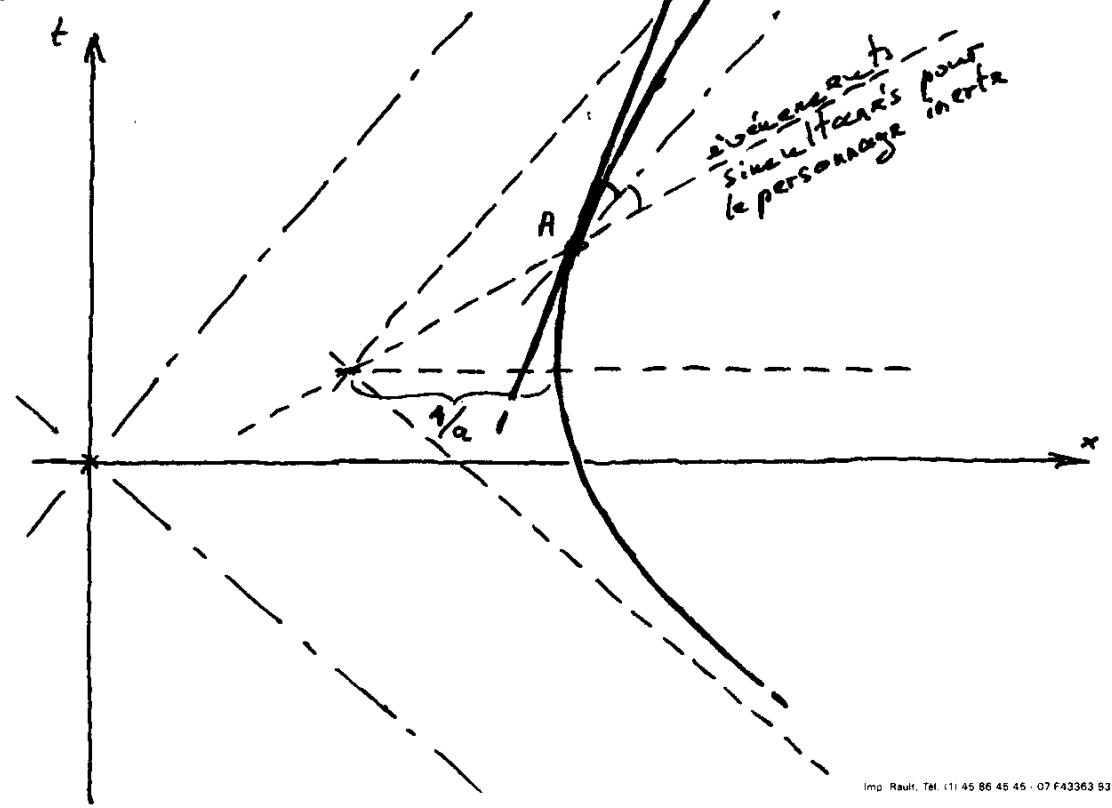
NOM :

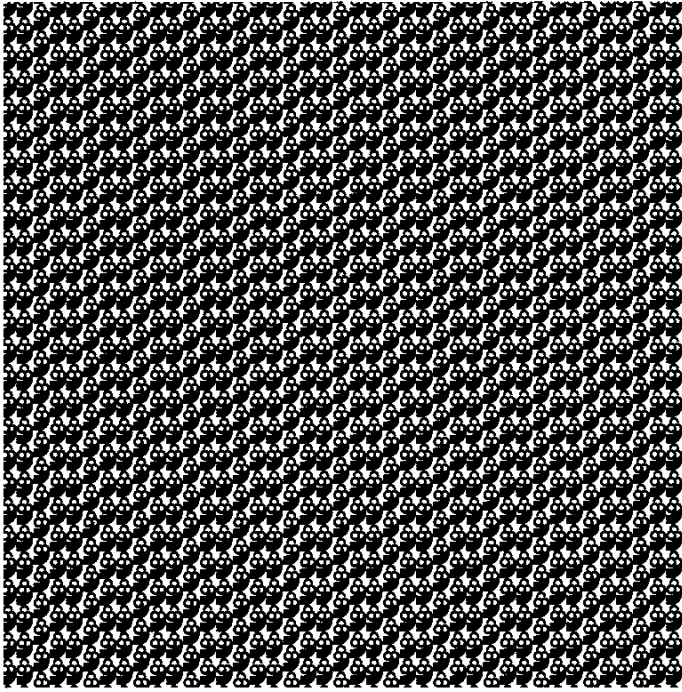
Appréciations :

NOTE :

Personnage inerte  
voit passer, acc. propre = a etc.

I La ficelle de Bell

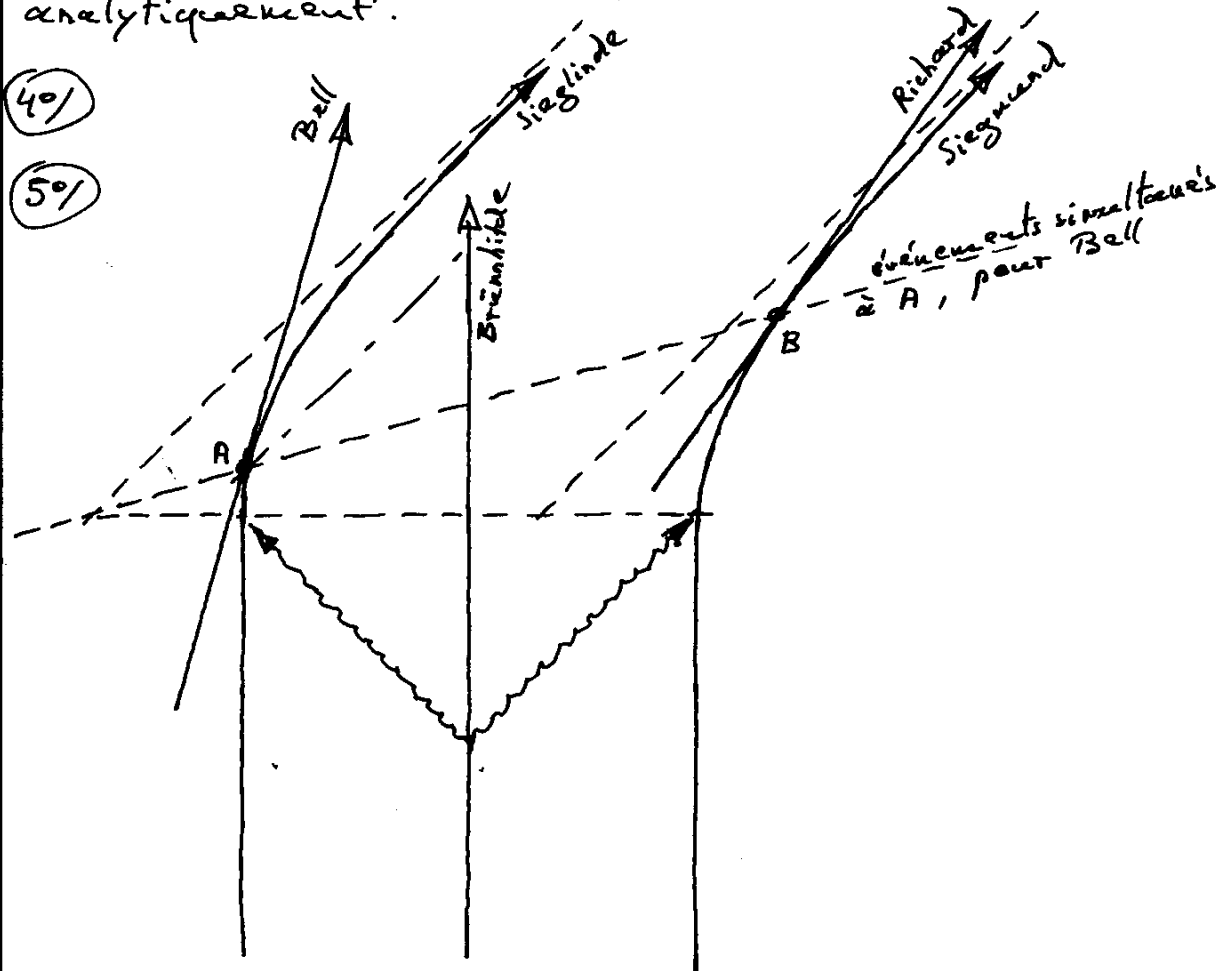




- (1°) Accélération propre =  $\alpha$   
 Distance (inters. asympt. - sommet) =  $\frac{1}{\alpha}$
- (2°) Ligne d'univers du personnage inerte = droite tangente en A à la ligne d'univers de la voyageuse.
- (3°) { événements simultanés ?  
 = droite passant par A, symétrique de la ligne d'univers du personnage / cône de lumière de A.

Remarque : cette droite passe par l'intersection des asymptotes (c'est

une propriété du mouvement à accélération propre constante, qui a nécessairement la même forme dans tous les repères, inertiels, et de ses asymptotes, droites de lumière, invariantes, qui le sont donc dans tous les repères; ça peut aussi se montrer analytiquement.



(6) i) Les hyperboles de Sieglinde et Siegmund sont identiques (même accélération propre), à une translation près (leur distance, ou la longueur de la ficelle, lorsqu'ils étaient inertes). Comme la pente des événements simultanés est positive (symétrique de la tangente à Sieglinde en A), B est postérieur à A, et donc :

$$(v_{\text{Sieglinde}/\text{Brün.}})_A < (v_{\text{Siegmund}/\text{Brün.}})_B$$

Donc :

$$0 < v_{\text{Ball}/\text{Brün.}} < v_{\text{Richard}/\text{Brün.}}$$

ii) Dans le repère de Bell :  $v_{\text{Ball}/\text{Bell}} = 0$

$$v_{\text{Rick}/\text{Ball}} > 0$$

Bell ~~voit~~ <sup>observe</sup> Richard s'éloigner.

Si ce n'est déjà fait, la ficelle est, à ± brève échéance, condamnée à **casser**.

## II Retard d'écho radar

(10)  $\mathcal{D}(\lambda) = \frac{\pi}{2}$  } est bien compatible avec  
 $p^{\mathcal{D}}(\lambda) = 0$  } l'équation géodésique pour  $\mathcal{D}$ ?  
 Voir l'équation en  $\mathcal{D}$ .

Pour le reste, intégrales premières :

$$\begin{aligned} r^2 p^{\varphi} &= J \\ (1 - \frac{r_g}{r}) p^t &= E \\ E^2 - (p^r)^2 &= (1 - \frac{r_g}{r}) (u_0^2 + \frac{J^2}{r^2}) \end{aligned}$$

(20)  $p^t = \frac{dt}{d\lambda} \Rightarrow \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1 - \frac{r_g}{r}}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = p^r \frac{1}{E} (1 - \frac{r_g}{r})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (1 - \frac{r_g}{r})^2 \left\{ 1 - \frac{1}{r^2} (1 - \frac{r_g}{r}) (J/E)^2 \right\}$$

$$(3^\circ) \quad r_0 \text{ t.q. } \frac{dr}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{r_0^2} \left(1 - \frac{r_g}{r_0}\right) \left(\frac{J}{E}\right)^2 = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{J}{E}\right)^2 = \frac{r_0^2}{1 - \frac{r_g}{r_0}}}$$

$$(4^\circ) \quad \text{Photon "montant"} \Rightarrow \frac{dr}{dt} > 0$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left\{ 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_0} \right\}^{1/2}}$$

(5°)

$$\boxed{t(r, r_0) = \int_{r_0}^r dr \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[ 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_0} \right]^{1/2}}}$$

$$(6^\circ) \quad \text{Système solaire: } r_g = 2GM_\odot \approx 3 \text{ km}$$

$$r_0 \geq R_\odot = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{r_g}{r_0} < 10^{-5}}$$

$$r \geq r_0 \Rightarrow \boxed{\frac{r_g}{r} < 10^{-5}}$$

Par contre  $r_0 \leq r \leq r_0 \Rightarrow \frac{r_0}{r}$  pas négligeable

$$\boxed{\frac{r_0}{r} \leq 1}$$

Pour voir l'effet de la gravitation, il faut et il suffit de développer au premier ordre en  $r_g$  (sans gravitation  $\Leftrightarrow r_g = 0$ ):

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left[ 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_0} \right]^{-1/2}$$

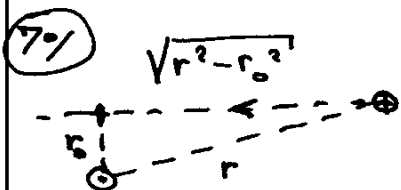
$$\approx \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) \left[ 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{r_g}{r_0}\right) \right]^{-1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 r_g \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right]^{-1/2} \\
&= \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]^{-1/2} \left[1 - \frac{r_g}{(1 - \frac{r_0}{r})^2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{r-r_0}{r_0 r}\right]^{-1/2} \\
&\approx \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r_g r_0}{r^2 - r_0^2} \frac{r-r_0}{r}\right] \\
&\approx \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]^{-1/2} \left[1 + \frac{r_g}{r} + \frac{1}{2} \frac{r_g r_0}{r(r+r_0)}\right]
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
t(r, r_0) &\approx \int_{r_0}^r dr \frac{r + r_g + \frac{1}{2} r_g \frac{r_0}{r+r_0}}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \\
&= \sqrt{r^2 - r_0^2} + r_g \log(r + \sqrt{r^2 - r_0^2}) + \frac{1}{2} r_g \left(\frac{r-r_0}{r+r_0}\right)^{1/2} \Big|_{r_0}^r
\end{aligned}$$

$$t(r, r_0) = \sqrt{r^2 - r_0^2} + r_g \log \frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} + \frac{r_g}{2} \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}$$



= temps mis par la lumière  
en absence de gravité  
( $\Leftrightarrow$  Pythagore  $\Leftrightarrow r_g = 0$ )

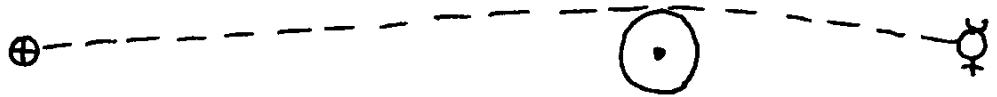
$$\Delta t \approx r_g \log \frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} + \frac{r_g}{2} \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}$$

↑ "décalage" de retard dû à la gravité

Signification un peu vague (qui réserve des problèmes dans l'analyse des mesures) car dès qu'il y a gravité, les coordonnées n'ont plus qu'une signification très relative (au système de coordonnées justement).

8°/  $\Delta t$  toujours  $> 0$ , maximum pour  $r_0$  mini.  
Il faut que le rayon qui va de la Terre à Mercure (et retour) passe au plus près du Soleil, c. à d.  $r_0 = R_0$ .

Autrement dit, situation de conjonction supérieure ;  
schématiquement :



9% Pour  $r_0 = R_0$ , durée totale de l'allée-retour :

$$t = 2 [t(r_0, R_0) + t(r_{\oplus}, R_0)] \\ = t_0 + \Delta t_{\max}$$

avec :

$$t_0 \approx 2 \left[ \sqrt{r_0^2 - R_0^2} + \sqrt{r_{\oplus}^2 - R_0^2} \right]$$

$$\Delta t_{\max} \approx 2 r_g \left\{ \log \left[ \frac{(r_0 + \sqrt{r_0^2 - R_0^2})(r_{\oplus} + \sqrt{r_{\oplus}^2 - R_0^2})}{R_0^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{r_0 - R_0}{r_0 + R_0} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left( \frac{r_{\oplus} - R_0}{r_{\oplus} + R_0} \right)^{1/2} \right\}$$

$$r_0, r_{\oplus} \gg R_0 \Rightarrow$$

$$\Delta t_{\max} \approx 2 r_g \left\{ \log \left( \frac{4 r_0 r_{\oplus}}{R_0^2} \right) + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{R_0}{r_0} + 1 - \frac{R_0}{r_{\oplus}} \right] \right\}$$

$\approx 6 \cdot 10^3$                        $\approx 3,5 \cdot 10^{-2}$                        $\approx 10^{-2}$

$$\Delta t_{\max} = 2 r_g \left[ 1 + \log \left( \frac{4 r_0 r_{\oplus}}{R_0^2} \right) \right]$$

$$r_g = 2,35 \text{ km} \Rightarrow \Delta t_{\max} = 5,9 \cdot [1 + 11,2]$$

$$\Delta t_{\max} = 72 \text{ km} = 240 \mu\text{s}$$

10% La quantité mesurée est le retard total :

$$t = t_0 + \Delta t_{\max}, \text{ avec}$$

$$t_0 \approx 2 \left[ r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{R_0}{r_0} \right)^2 \right) + r_{\oplus} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{R_0}{r_{\oplus}} \right)^2 \right) \right]$$

$$t_0 = 2 (r_0 + r_{\oplus}) \left[ 1 - \frac{R_0^2}{2 r_0 r_{\oplus}} \right] \approx 20 \text{ minutes}$$

$\Rightarrow$  pour déterminer  $\Delta t_{\text{max}}$  à 10  $\mu\text{s}$  près,  
 il faut connaître  $t_0$ , c. à d.  $r_{\oplus}$  et  $r_{\otimes}$  à 1 km près.  
 Ça n'est pas le cas, et a fortiori les mesures  
 de  $r_{\oplus}$  et  $r_{\otimes}$  ne nous disent pas s'il s'agit  
 de coordonnées de Schwarzschild  $\Rightarrow$  flou conceptuel  
 (comme souvent en gravitation, qui exigerait  
 une analyse de cette expérience en cohérence avec  
 les autres expériences sur  $\oplus$  et  $\otimes$ ).  
 Autre source d'erreur:  $\oplus$  et  $\otimes$  pas ponctuelles!  
 (d'ailleurs leurs diamètres sont  $\gg 1$  km), on ne  
 sait pas sur quel point de  $\otimes$  le signal a  
 été réfléchi.

III En deçà de l'horizon

(10) D'après les équations des géodésiques, on  
 sait déjà qu'elles sont satisfaites par

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(\lambda) &= cte & p^{\lambda} &= p^{\psi} = 0 \\
 \varphi(\lambda) &= cte
 \end{aligned}$$

Pour ces géodésiques, reste, dans le cas de  
 la lumière :

$$0 = ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2$$

Dans le cas de lumière montante ( $dr/dt > 0$ ):

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{r_g}{r}}$$

$$\begin{aligned}
 (20) \quad dt &= \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} \\
 t_0 - t_s &= \int_{r_s}^{r_0} \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} = \int_{r_s}^{r_0} dr \frac{r}{r - r_g} = \int_{r_s}^{r_0} dr \frac{r - r_g + r_g}{r - r_g}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{t_0 = t_s + r_0 - r_s + r_g \log \frac{r_0 - r_g}{r_s - r_g}}$$

(3°) Quand  $r_s \rightarrow r_g$  (par valeurs supérieures),

$$t_0 \rightarrow \infty \text{ comme } -\log(r_s - r_g).$$

C'est le sens pour l'observatrice, elle ne verra jamais le signal lumineux émis par S

$\Rightarrow$  S devient invisible ( $\neq r_0$ ) ~~pour~~ lorsque  $r_s = r_g$   
(et, a fortiori, et sans faire le détail, lorsque  $r_s < r_g$ )

$\Rightarrow$  horizon  $\boxed{r = r_g}$

(4°) 
$$\frac{dt}{dr} = \sqrt{\frac{g_{rr}(r)}{g_{tt}(r)}} \xrightarrow{r \rightarrow r_g} \infty$$

Tout le problème vient:

- de la singularité de  $\frac{g_{rr}}{g_{tt}}$  en  $r_g$
- qui ici donne une divergence logarithmique dans l'intégrale  $t$ .

(5°) Observatrice:

$$d\tau^2 \stackrel{\leq}{=} ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

immobile (coord. de Schwarzschild):

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r_0}\right) dt^2$$

$$\tau = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} t + \text{cte.}$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 $\tau \pm 1$  réglage des montres avant la mission  
 donné par la pendule de bord légale.

Et donc pour notre question,

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \tau \rightarrow \infty,$$

existence d'un horizon, indépendamment de tout système de coordonnées.

IV. Révons à la folie

10/ i) Signature +, -, -, -

=> 3 coord. localement plates, espace local Minkowski  
3 tetrade orthogonale

ii) observatrice :  $dz^2 \hat{=} ds^2$

immobile / l, l, phi :  $dz^2 = dt^2$  =>  $|dz = dt|$

=> signification de la coordonnée  $t = \text{temps propre observ. immob.}$

iii) A t et l fixés :

$ds^2 = -(b^2 + l^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$   $\theta \in [0, \pi]$   
 $\varphi \in [0, 2\pi]$

=  $\text{sphère}$  à 2 dim. rayon  $\sqrt{b^2 + l^2}$   
(co) latitude  $\theta$  (longitude de  $\varphi$ )

=> à une transformation près, la coordonnée l joue un rôle de  $\text{distance radiale}$ ,

d'ailleurs, à  $\theta$  et  $\varphi$  fixés :  $ds^2 = dt^2 - dl^2$

iv)  $ds^2 \underset{p^2 \gg b^2}{\sim} dt^2 - dl^2 - l^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$   
métrique de Minkowski

=> 2 régions asymptotiquement plates :  
↑ tout au moins pour les coordonnées.

$l \ll -b$   
 $l \gg b$

v)  $g_{tt} \neq 0$

$g_{rr}, g_{\theta\theta}, g_{\varphi\varphi} \neq 0$  } => pas de singularité  
 $\text{pas d'horizon}$

20/  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, t_0$

i)  $^2 ds^2 = dl^2 + (b^2 + l^2) d\varphi^2$   
 $l \in ]-a, a[ , \varphi \in [0, 2\pi]$

ça a une signification "physique" (une surface de l'espace temps en présence d'une certaine source de gravitation)

ii)  $^3 ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2$   
 $z \in ]-a, +a[$   
 $r \in [0, \infty[ , \varphi \in [0, 2\pi]$

aucune signification physique : ça aide le raisonneur, pas le voyageur !

Surface  $z(r)$  :  $dz = z'(r) dr$

$^2 ds^2 = (1 + z'^2) dr^2 + r^2 d\varphi^2$

$r \in [0, +\infty[$   
 $\varphi \in [0, 2\pi]$

iii)

$$(1+z'^2) dr^2 + r^2 d\varphi^2 = dl^2 + (b^2+l^2) d\varphi^2$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2 = b^2 + l^2}$$

$$l = \pm \sqrt{r^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{r \in [b, +\infty[}$$

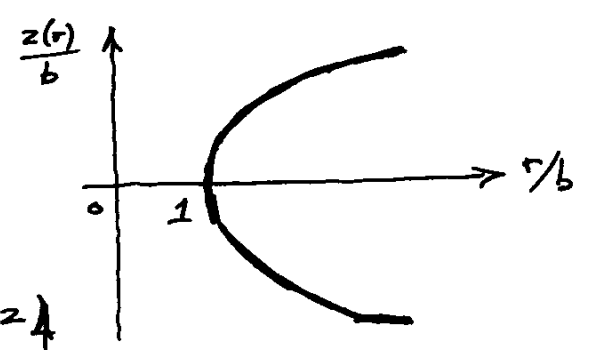
$$\left. \begin{aligned} (1+z'^2) dr^2 &= dl^2 \\ r dr &= l dl \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1+z'^2 = \frac{r^2}{l^2} = \frac{r^2}{r^2-b^2}$$

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{b^2}{r^2-b^2}$$

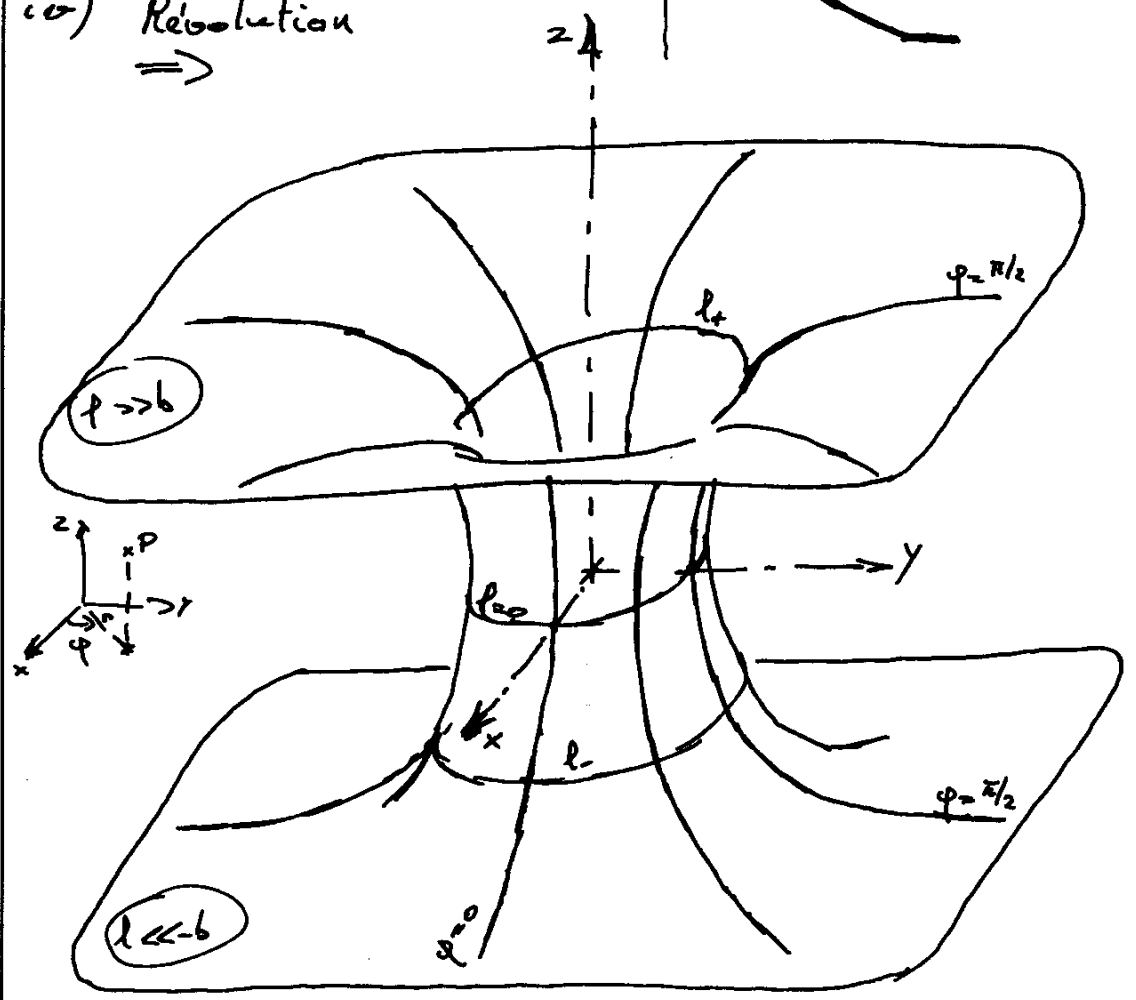
$$\frac{dz}{dr} = \pm \frac{b}{\sqrt{r^2-b^2}}$$

$$\frac{d(z/b)}{d(r/b)} = \pm \frac{1}{\sqrt{(\frac{r}{b})^2 - 1}}$$

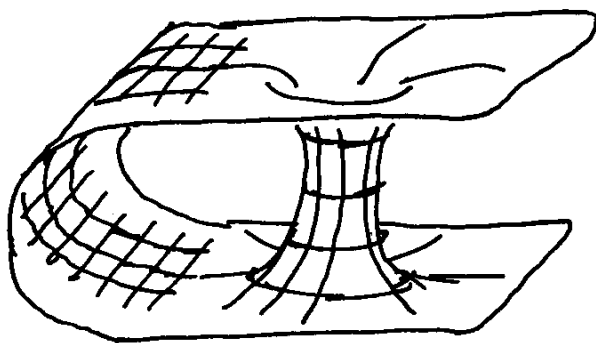
$$\boxed{\frac{z(r)}{b} = \pm \operatorname{arccosh} \frac{r}{b}}$$



iv) Révolution  
 $\Rightarrow$



v) Possibilité de raccorder les deux zones plates ( $l \rightarrow \pm \infty$ ) par une autre zone plate:



$\Rightarrow$  un monde plat dans lequel on peut aller d'un point à un autre:

- soit par un chemin plat
- soit par un raccourci courbé ...

(Compatible avec les équations d'Einstein qui ne disent que la structure locale de l'espace-temps).

(30) i) Métrique  $ds^2 \rightarrow g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\alpha}$   
 $\rightarrow$  symboles de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} = \dots$

Métrique diagonale  $\Rightarrow$

$$\Gamma_{12}^0 = 0 \quad \Gamma_{00}^1 = -\frac{g_{00,1}}{2g_{00}} \quad \Gamma_{01}^0 = \frac{g_{00,1}}{2g_{00}}$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{g_{00,0}}{2g_{00}}$$

$\rightarrow$  tenseur de Riemann:

$$R^{\alpha}_{\mu\rho\gamma} = \partial_{\rho} \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} - \partial_{\gamma} \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha} - (\beta \leftrightarrow \gamma)$$

(anti) symétries:

$$R_{\lambda\rho\mu\gamma} = -R_{\lambda\rho\gamma\mu} = R_{\mu\gamma\lambda\rho} = \dots$$

$\rightarrow$  tenseur de Ricci:  $R_{\mu\gamma} \hat{=} R^{\alpha}_{\mu\alpha\gamma}$  (sym.)

scalaire de ---:  $R \hat{=} R^{\alpha}_{\alpha}$

$\rightarrow$  tenseur d'Einstein:  $G_{\mu\rho} \hat{=} R_{\mu\rho} - \frac{1}{2} R g_{\mu\rho}$

Equations d'Einstein  $\Rightarrow$  tenseur impulsion-énergie source de ce monde:

$$T_{\mu\rho} = \frac{1}{8\pi G} G_{\mu\rho}$$

ii)  $g_{tt} = 1, g_{rr} = -1, g_{\theta\theta} = -(b^2 + r^2), g_{\varphi\varphi} = -(b^2 + r^2)\sin^2\theta$

Dérivées non nulles:

$g_{\theta\theta,r} = -2r$

$g_{\varphi\varphi,r} = -2r \sin^2\theta, g_{\varphi\varphi,\theta} = -2(b^2 + r^2)\sin\theta \cos\theta$

$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{g_{\theta\theta,r}}{2g_{\theta\theta}} = -\frac{-2r}{-2} = -r$

$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{g_{\varphi\varphi,r}}{2g_{\varphi\varphi}} = -\frac{-2r \sin^2\theta}{-2} = -r \sin^2\theta$

&c....

iii)  $R^r_{\theta r \theta} = \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda r}^r - \Gamma_{r\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^r - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r$   
 $= -1$   
 $= -1 - \frac{r}{b^2 + r^2} \cdot (-r)$   
 $= -\frac{b^2}{b^2 + r^2}$

$R_{\theta r \theta} = g_{rr} R^r_{\theta r \theta} \rightarrow R_{\theta r \theta} = \frac{b^2}{b^2 + r^2}$

&c....

⚠️ fa de frapper dans l'annonce (les autres comptes sont justes)

iv)  $R_{\theta\theta\theta\theta} = R_{\theta r \theta r} = \frac{b^2}{b^2 + r^2}$

$\Rightarrow R^r_{\theta r \theta} = \frac{1}{g_{rr}} R_{\theta r \theta} = -\frac{b^2}{b^2 + r^2}$

$R^\theta_{\theta\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} R_{\theta r \theta r} = -\frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}$

$R_{\varphi r \varphi r} = R_{\varphi \theta \varphi \theta} = \frac{b^2}{b^2 + r^2} \sin^2\theta$

$\Rightarrow R^r_{\varphi r \varphi} = \frac{1}{g_{rr}} R_{\varphi r \varphi r} = -\frac{b^2}{b^2 + r^2} \sin^2\theta$

$R^\varphi_{\varphi\varphi\varphi} = \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} R_{\varphi r \varphi r} = -\frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}$

$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = R_{\varphi\theta\varphi\theta} = -b^2 \sin^2\theta$

$\Rightarrow R^\theta_{\varphi\theta\varphi} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} R_{\theta\varphi\theta\varphi} = \frac{b^2}{b^2 + r^2} \sin^2\theta$

$R^\varphi_{\theta\varphi\theta} = \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} R_{\theta\varphi\theta\varphi} = \frac{b^2}{b^2 + r^2}$

$$R_{\theta\theta} = R^{\theta}_{\theta\theta\theta} + R^{\varphi}_{\theta\theta\varphi} = -\frac{2b^2}{(b^2 + \rho^2)^2}$$

$$R_{\varphi\varphi} = R^{\theta}_{\varphi\varphi\theta} + R^{\rho}_{\varphi\varphi\rho} = 0$$

$$R_{\rho\rho} = R^{\theta}_{\rho\rho\theta} + R^{\varphi}_{\rho\rho\varphi} = 0$$

$$R^{\theta}_{\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} R_{\theta\theta} = (-1) \left( -\frac{2b^2}{(b^2 + \rho^2)^2} \right) = \frac{2b^2}{(b^2 + \rho^2)^2}$$

$$R = R^{\theta}_{\theta} = \frac{2b^2}{(b^2 + \rho^2)^2}$$

$$v) \quad G_{\mu\nu} \hat{=} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow G_{tt} = 0 - \frac{1}{2} \frac{2b^2}{(b^2 + \rho^2)^2} \cdot 1 = -\frac{b^2}{(b^2 + \rho^2)^2}$$

$$G_{\theta\theta} = -\frac{2b^2}{(b^2 + \rho^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{2b^2}{(b^2 + \rho^2)^2} (-1) = -\frac{b^2}{(b^2 + \rho^2)^2}$$

$$G_{\rho\rho} = 0 - \frac{1}{2} \frac{2b^2}{(b^2 + \rho^2)^2} (-)(b^2 + \rho^2) = \frac{b^2}{b^2 + \rho^2}$$

$$G_{\varphi\varphi} = 0 - \frac{1}{2} \frac{2b^2}{(b^2 + \rho^2)^2} (-)(b^2 + \rho^2) \sin^2 \vartheta = \frac{b^2}{b^2 + \rho^2} \sin^2 \vartheta$$

$$\overline{T}_{tt} = \overline{T}_{\theta\theta} = -\frac{1}{8\pi G} \frac{b^2}{(b^2 + \rho^2)^2}$$

$$\overline{T}_{\rho\rho} = \frac{1}{8\pi G} \frac{b^2}{b^2 + \rho^2} \quad \overline{T}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{8\pi G} \frac{b^2}{b^2 + \rho^2} \sin^2 \vartheta$$

vi)  $\left. \begin{array}{l} \text{Erdra en chute libre?} \\ \text{vitesse nulle} \\ / \rho, \vartheta, \varphi \end{array} \right\} \rightarrow$  en cet équilibre, les coordonnées  $\rho, \vartheta, \varphi$  lui sont plates (ou plus exactement:  $d\hat{t} = dt, d\hat{\rho} = d\rho, d\hat{\vartheta} = \dots$ )

Traînée associée:

$$\underline{e}_{\hat{t}} \cdot \underline{e}_{\hat{t}} \hat{=} 1, \quad \underline{e}_t \cdot \underline{e}_t = g_{tt} = 1 \Rightarrow \underline{e}_{\hat{t}} \hat{=} \underline{e}_t$$

$$\underline{e}_{\hat{\rho}} \cdot \underline{e}_{\hat{\rho}} \hat{=} -1, \quad \underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_\rho = g_{\rho\rho} = -1 \Rightarrow \underline{e}_{\hat{\rho}} \hat{=} \underline{e}_\rho$$

$$\underline{e}_{\hat{\vartheta}} \cdot \underline{e}_{\hat{\vartheta}} \hat{=} -1, \quad \underline{e}_\vartheta \cdot \underline{e}_\vartheta = g_{\vartheta\vartheta} = -(b^2 + \rho^2) \Rightarrow \underline{e}_{\hat{\vartheta}} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{b^2 + \rho^2}} \underline{e}_\vartheta$$

$$\underline{e}_{\hat{\varphi}} \cdot \underline{e}_{\hat{\varphi}} \hat{=} -1, \quad \underline{e}_\varphi \cdot \underline{e}_\varphi = g_{\varphi\varphi} = -(b^2 + \rho^2) \sin^2 \vartheta \Rightarrow \underline{e}_{\hat{\varphi}} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{b^2 + \rho^2} \sin \vartheta} \underline{e}_\varphi$$

vii) Les composantes covariantes se transforment comme les produits de base d'indices correspondants.

$$\Rightarrow T_{EF} = T_{tt}$$

$$T_{\hat{e}\hat{e}} = T_{rr}$$

$$T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{1}{b^2 + r^2} T_{\theta\theta}$$

$$T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \frac{1}{(b^2 + r^2) \sin^2 \theta} T_{\varphi\varphi}$$

$$\Rightarrow T_{\hat{t}\hat{t}} = T_{\hat{r}\hat{r}} = -T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = -T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = -\frac{1}{8\pi G} \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}$$

Tout devient plus symétrique dans une tétrade orthonormée en chute libre ; p. ex :

$$R_{\hat{e}\hat{\theta}\hat{e}\hat{\theta}} = R_{\hat{e}\hat{\varphi}\hat{e}\hat{\varphi}} = -R_{\hat{\theta}\hat{\varphi}\hat{\theta}\hat{\varphi}} = \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2},$$

et l'interprétation plus évidente car correspondant au point de vue ordinaire (?) en absence de pesanteur.

viii) Ici, densité d'énergie nécessaire pour réaliser ce monde :

$$\rho = T_{\hat{t}\hat{t}} = -\frac{1}{8\pi G} \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}$$

négative !! irréalisable actuellement (mais on peut inventer d'autres mondes, avec raccourcis, fabriqués par des densités d'énergie positives).

Ici,  $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  a la même forme que l'impulsion-énergie d'un champ électrique radiale ... sauf que la densité d'énergie est négative :

$$\rho = -\epsilon = -p.$$

(40)

i) Equations des géodésiques (ligne d'univers  $ds^2 > 0$ )

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0$$

Existe-t-il solutions "radiale" c. à d.  $d_{\text{cte}}, \varphi = \text{cte}$  ?

Autrement dit  $\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$  ?

Equations  
+ symboles  
de Christoffel  
+  $\left(\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0\right)$

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2 t / d\tau^2 = 0 \\ d^2 r / d\tau^2 = 0 \\ d^2 \theta / d\tau^2 = 0 \\ d^2 \varphi / d\tau^2 = 0 \end{array} \right.$$

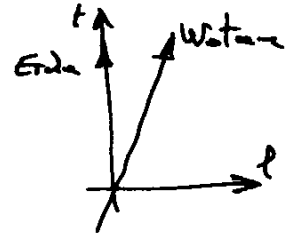
$\Rightarrow$  compatibles avec  $d_{\text{cte}}, \varphi = \text{cte}$ .

tandis que la solution des 2 premières équations  
 $\Rightarrow \begin{cases} t = a z + b \\ l = c z + d \end{cases} \Rightarrow \boxed{l = v t}$  si choix  $l=0$  pour  $t=0$

avec  $|v| < 1$ , pour que la géodésique soit du genre temps (nécessaire pour un voyageur matériel):

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = (1-v^2) dt^2 > 0$$

$\uparrow$   $dz = dy = 0$



ii) Wotan se meut à vitesse  $v$  selon  $l$ , par rapport à Erda:  
 "Galiléè": " $l' = l - vt$ "

Lorentz: (spéciale, standard)

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma(v) (dt - v dl) \\ dl' &= \gamma(v) (dl - v dt) \\ dd' &= dd \\ d\varphi' &= d\varphi \end{aligned}$$

 $\gamma(v) \hat{=} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$   
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda_{t'}^t \\ \Lambda_{l'}^l \end{pmatrix}$

iii)  $\hat{g}_{\mu\nu}$ , c'est pour des coordonnées contravariantes  
 Pour les vecteurs de base, covariants, c'est l'inverse:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{\hat{t}'} &= \gamma (\hat{e}_{\hat{t}} + v \hat{e}_{\hat{l}}) \\ \hat{e}_{\hat{l}'} &= \gamma (v \hat{e}_{\hat{t}} + \hat{e}_{\hat{l}}) \\ \hat{e}_{\hat{\theta}'} &= \hat{e}_{\hat{\theta}} \\ \hat{e}_{\hat{\varphi}'} &= \hat{e}_{\hat{\varphi}} \end{aligned}$$

 $\Rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda_{\hat{\mu}'}^{\hat{\nu}} \end{pmatrix}$

50) i)  $\begin{cases} \hat{e}_{\hat{r}'} = \hat{e}_{\hat{r}} \\ \hat{e}_{\hat{\theta}'} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + r^2}} \hat{e}_{\hat{\theta}} \end{cases} \Rightarrow R_{\hat{\theta}\hat{\theta}'}^{\hat{r}\hat{r}'} = \frac{1}{b^2 + r^2} R_{\hat{r}\hat{r}}^{\hat{\theta}\hat{\theta}}$

$R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{\theta}'}^{\hat{r}\hat{r}'} = \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}$

$\hat{e}_{\hat{\varphi}'} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + r^2} \sin\theta} \hat{e}_{\hat{\varphi}}$   $\Rightarrow R_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}'}^{\hat{r}\hat{r}'} = \frac{1}{(b^2 + r^2) \sin^2\theta} R_{\hat{r}\hat{r}}^{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}$

$R_{\hat{r}\hat{\varphi}\hat{\varphi}'}^{\hat{r}\hat{r}'} = \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}$

$R_{\hat{\theta}\hat{\varphi}\hat{\varphi}'}^{\hat{r}\hat{r}'} = \frac{1}{(b^2 + r^2)^2 \sin^2\theta} R_{\hat{\theta}\hat{\varphi}\hat{\varphi}}$   $\Rightarrow \boxed{R_{\hat{\theta}\hat{\varphi}\hat{\varphi}'}^{\hat{r}\hat{r}'} = -\frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}}$

Dans la tétraèdre de Wotau :

$$\Delta A^{\hat{\alpha}'} = -R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{\beta}'\hat{\gamma}'\hat{\delta}'} U^{\hat{\beta}'} \xi^{\hat{\gamma}'} U^{\hat{\delta}'}$$

$$\text{avec } U^{\hat{t}'} = 1, \quad U^{\hat{r}'} = U^{\hat{\theta}'} = U^{\hat{\phi}'} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta A^{\hat{\alpha}'} = -R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{t}'\hat{r}'\hat{t}'} \xi^{\hat{r}'}$$

On a besoin de :

$$R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{t}'\hat{r}'\hat{t}'} = \Lambda^{\hat{\alpha}'}_{\hat{t}'} \Lambda^{\hat{r}'}_{\hat{t}'} \Lambda^{\hat{t}'}_{\hat{r}'} \Lambda^{\hat{t}'}_{\hat{t}'} R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{t}'\hat{r}'\hat{t}'} \in \{\hat{t}', \hat{r}'\}$$

$$\text{seules contributions: } R^{\hat{\theta}'}_{\hat{t}'\hat{r}'\hat{t}'} = R^{\hat{\phi}'}_{\hat{t}'\hat{r}'\hat{t}'} = \frac{b^2}{(b^2 + l^2)^2}$$

$$\Rightarrow R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{t}'\hat{r}'\hat{t}'} = \Lambda^{\hat{\alpha}'}_{\hat{t}'} \Lambda^{\hat{r}'}_{\hat{t}'} \Lambda^{\hat{t}'}_{\hat{r}'} \Lambda^{\hat{t}'}_{\hat{t}'} R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{t}'\hat{r}'\hat{t}'} \in \{\hat{\theta}', \hat{\phi}'\}$$

$$R^{\hat{\theta}'}_{\hat{t}'\hat{r}'\hat{t}'} = R^{\hat{\phi}'}_{\hat{t}'\hat{r}'\hat{t}'} = \gamma^2 v^2 \frac{b^2}{(b^2 + l^2)^2}$$

$$ii) R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{t}'\hat{\theta}'\hat{t}'} = R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{t}'\hat{\phi}'\hat{t}'} = -\gamma^2 v^2 \frac{b^2}{(b^2 + l^2)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta A^{\hat{\theta}'} = \frac{d^2}{dt'^2} \xi^{\hat{\theta}'} = \frac{v^2}{1-v^2} \frac{b^2}{(b^2 + l^2)^2} \xi^{\hat{\theta}'}$$

$$\Delta A^{\hat{\phi}'} = \frac{d^2}{dt'^2} \xi^{\hat{\phi}'} = \xi^{\hat{\phi}'}$$

Force de marée maximale en  $l=0$   
Wotau peut la réduire autant qu'il veut en se choisissant une vitesse  $v$  de voyage petite.

$$(\Delta A \sim v^2)$$