# ÉNERGIE - IMPULSION

## Constantes du mouvement

"Classiquement",
pour des "particules" (élémentaires, billes, fusées, planètes, étoiles, ...),
en interaction mutuelle,
∃ situations où
$$\begin{cases} \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_f m_f \vec{v}_f \\ \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_f \frac{1}{2} m_f v_f^2 \quad (+ Q \text{ si inélastique}) \end{cases}$$

appelées ~ systèmes isolés.

Une propriété :
$$\begin{cases} \sum_j m_j \vec{v}_j = \text{cte} \\ \text{invariance de forme / transf. de Galilée} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{/autre repère}}{} \begin{cases} \sum_j m_j \vec{v}_j{}' = \text{cte} \\ \vec{v}_j{}' = \vec{v}_j - \vec{\beta} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\sum_j m_j \vec{v}_j}_{\text{cte}} - \underbrace{\vec{\beta}}_{\text{cte}} \sum_j m_j = \text{cte}$$

⟹ ‖ En relativité galiléenne, la masse totale est nécessairement conservée.

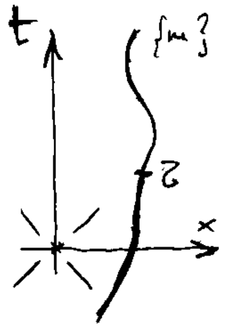
(et ensuite $\sum_j \frac{1}{2} m_j v_j'^2 = \text{cte}$ )

Problème :
¿ Existe-t-il,
dans le cadre de la relativité einsteinienne
(invariance de forme des lois phys. / T. L. ),
des grandeurs physiques,
jouant un rôle analogue à $m\vec{v}$ et $\frac{1}{2}mv^2$,
associées à une particule $m$
et à son mouvement $\vec{v}$ ?

Autrement dit: $\underbrace{f(m,v)}_{\text{scal}} \underbrace{\vec{v}}_{\text{vect}}$ , $\underbrace{g(m,v)}_{\text{scal}}$ ? / rotations

Problème compliqué pour les pères fondateurs, enfantin quand on dispose de la notion de quadrivecteur (purement technique, mais ça n'empêche pas d'être amusant et même esthétique).

Comme pour faire des lois invar. / rotations, on peut utiliser les ingrédients scalaires, vectoriels / T.L, fabriqués avec $m$, $\vec{v}$.




$$\left\{\begin{array}{l}\text{part: } m \\ \text{l.d'u: } \underset{\sim}{x}(\tau)\end{array}\right. \longrightarrow \boxed{\underset{\sim}{p}(\tau) \hat{=} m\, \underset{\sim}{U}(\tau)} = m \frac{d\underset{\sim}{x}}{d\tau}$$

4-vect.

4-vect

lue dans les tables, la même pour tous, scalaire

(Remarquer : on ne peut pas en faire d'autre avec $m$ et $\vec{v} \Leftrightarrow \underset{\sim}{U}$)

Autrement dit :

$\left\{\begin{array}{l}\text{particule } m \\ \text{en un événement,}\end{array}\right.$

par rapport à un repère $\Longrightarrow$ vitesse $\vec{v}$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} p^t = \gamma(v)\, m \\ \vec{p} = \gamma(v)\, m\, \vec{v}\end{array}\right.}$$

Et alors ?

<u>Si</u> un processus apparaît avoir, par rap. à un repère,

$$\sum_i p_i^\alpha = P^\alpha = \sum_f p_f^\alpha ,$$

alors

$$\sum_i \underset{\sim}{p_i} = \underset{\sim}{P} = \sum_f \underset{\sim}{p_f} ,$$

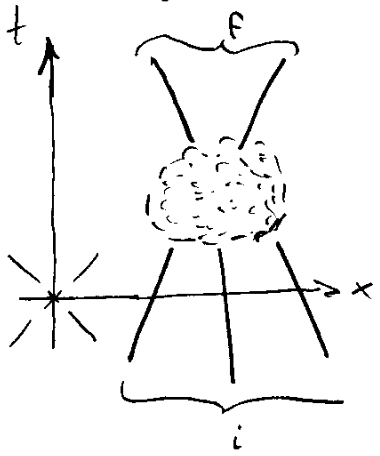
et, par rapport à tout autre repère (équivalent, c.à.d. transformé de Lorentz) :

$$\sum_i p_i^{\alpha'} = P^{\alpha'} = \sum_f p_f^{\alpha'} .$$

Est-ce que ça arrive dans la nature ? Oui, dans de nombreux cas, ± idéalisés, que l'on appelle

<u>systèmes isolés</u>

Qu'est-ce que ça signifie, concrètement ? (comme disent les journalistes)




$$\begin{cases} \sum \gamma(v_i) m_i = \sum \gamma(v_f) m_f \\ \sum \gamma(v_i) m_i \vec{v_i} = \sum \gamma(v_f) m_f \vec{v_f} \end{cases}$$

et la <u>même</u> histoire contemplée dans un <u>autre</u> repère (autres vitesses) :

$$\begin{cases} \sum \gamma(v'_i) m_i = \sum \gamma(v'_f) m_f \\ \sum \gamma(v'_i) m_i \vec{v_i}' = \sum \gamma(v'_f) m_f \vec{v_f}' \end{cases}$$

<u>Propriétés</u>

Comportements en terrain connu ? (domaine galiléen, c.à d. où la mécanique newtonienne est valide, c à d. à basse vitesse)

$$\vec{p} = \gamma(v) m \vec{v} = m\vec{v} + O(v^3) \underset{v \ll 1}{\sim} m\vec{v}$$ impulsion classique !

$\Rightarrow$ $\vec{p}$ = <u>impulsion (relativiste)</u> de la particule

$$p^t = \gamma(v) m = \underbrace{m}_{} + \underbrace{\tfrac{1}{2} m v^2}_{\text{énergie cinétique classique}} + O(v^4)$$

ça, c'est nouveau, mais ça ne joue aucun rôle dans le domaine classique (invar. galil.) car $\sum m$ conservée

$\Rightarrow$ $\sum \frac{1}{2} m v^2$ conservé ...

sauf si $\sum m$ pas conservé, ça se traduit par un $\varphi$ de réaction (inélast.) mais on n'est plus (tout-à-fait) dans le cadre galiléen

$\Rightarrow$ $p^t$ = <u>énergie (relativiste)</u> de la particule

et $p_\mu$ = <u>énergie-impulsion</u>

ou <u>quadri-impulsion</u>

Autre notation pour l'énergie :

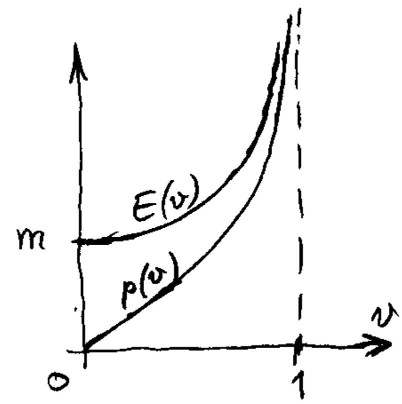
$$E \hat{=} p^t = \gamma(v)\, m$$

Si $v = 0$, alors: $E_0 = m$ (le médiatisé $E = mc^2$)

$= $ énergie de repos
énergie propre

En accédant au rang de forme d'énergie, la masse perd, du coup, toute prétention à la conservation. C'est l'énergie (totale) qui est conservée, pas (forcément) la masse totale.

$$\begin{cases} E(v) = \gamma(v)\, m \\ p(v) = \gamma(v)\, m\, v \end{cases}$$




$$T \hat{=} E - E_0$$
$$= E - m$$
$= $ énergie cinétique (relativiste)
(sans grand intérêt, peu utilisée)

Identités remarquables

$$\underset{\sim}{p} = m \underset{\sim}{U} \implies \boxed{\underset{\sim}{p}^2 = m^2}$$ fondamental

$$(p^t)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$$

$$\boxed{E^2 = p^2 + m^2}$$ pratique

$$\vec{v} = \frac{\vec{U}}{U^t} \implies \boxed{\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}}$$ pas fondamental, mais trrrès pratique

## Particules de masse nulle ?

$$p_\mu \doteq m\, \underset{\sim}{U} \implies \text{rien du tout !}$$

$\quad \llcorner_{0\,?}$

Essayons autrement : imaginons (juste pour voir) une particule,
càd. de l'énergie-impulsion (sous forme de 4-vecteur entrant dans les bilans d'énergie-impulsion)
telle que $\quad (p^\alpha) \doteq \begin{cases} p^t = E = |\vec{p}| \\ \vec{p} \end{cases}$

Ça n'a rien qui contredise la théorie de la relativité.
C'est juste une extension de la notion de quadri-impulsion à des particules qui auront alors

$$p^2 = 0, \quad \text{genre lumière.}$$

$\Rightarrow$ en étendant les identités remarquables :

1) $\quad m^2 = p_\mu^2 \implies \begin{cases} \text{masse classique si } p_\mu^2 \neq 0 \\ \text{masse nulle si } p_\mu^2 = 0 \end{cases}$

2) $\quad \vec{v} = \dfrac{\vec{p}}{E} \implies \begin{cases} \text{vitesse ordinaire} < 1, \text{ si } p_\mu^2 \neq 0 \\ \text{vitesse } = 1, \text{ si } p_\mu^2 = 0. \end{cases}$

Particules $p^2 = 0$ très spéciales : $ds^2 = 0$ ;
pour elles :
- pas de notion de temps propre (pas d'écoulement, pas d'âge)
- pas de T.L $\longrightarrow$ repère où la vitesse soit nulle,
- pas d'observatrice juchée sur la particule,
- pas de limite ~~classique~~ galiléenne (une particule de masse nulle n'y joue aucun rôle, une vitesse infinie n'est pas définie !)

Et enfin : ce genre de particule (théoriquement viable) est-il réalisé dans la nature ?

Mettable en évidence...
- par observation directe (détection, temps de vol);
- par défaut dans un bilan d'énergie-impulsion;

mais on ne pourra jamais être certain que la masse en soit strictement nulle (aucun réel, a fortiori zéro, n'est réellement mesurable).

Candidates :

| | |
|---|---|
| $\gamma$ | $m < 2 \times 10^{-16}$ eV |
| $\bar{\nu}_e$ | 3 eV |
| $\nu_e$ | 0,46 keV |
| $\nu_\mu$ | 0,19 MeV |
| $\nu_\tau$ | 18,2 MeV |
| $g$ | 99 MeV |

(pour $\nu_e$ et $\nu_\mu$) et ya des oscillations

## Voyage à accélération propre constante : la facture énergétique

Pour une fusée qui, entre $\tau$ et $\tau + d\tau$,
éjecte une quantité d'énergie $d\mathcal{E}$,
sous une vitesse $u$ (par rapport à la fusée, càd. par rapport au repère inertiel comobile en l'évén$^{\underline{nt}}$ $\tau$).

Paramétrisation pratique car :
- on peut éjecter de la masse nulle !
- techniquement, fonctionnement au meilleur rendement à $u$ maximale (constante, compatible avec la résistance de la tuyère à la température d'éjection)

Dans le repère inertiel co-mobile :

à $\tau$ | à $\tau + d\tau$


| Conservation | | | |
|---|---|---|---|
| $E_{tot}$ | $m$ | $=$ | $d\mathcal{E} + \gamma(dv)\,(m+dm)$ |
| $P_{tot}$ | $0$ | $=$ | $-\,d\mathcal{E}\,u + \gamma(dv)\,(m+dm)\,dv$ |

$$\Longrightarrow \begin{cases} d\varepsilon + dm = 0 \\ -u\,d\varepsilon + m\,dv = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad u\,dm + m\,dv = 0$$

et $dv = a(\tau)\,d\tau$

accélération propre de Claudie

$$\Longrightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{a(\tau)}{u}\,d\tau$$

Et enfin, si Claudie pilote

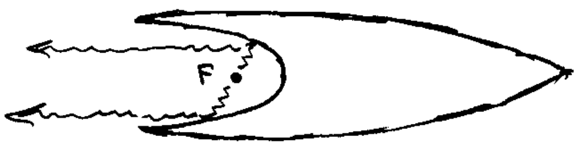
- au meilleur rendement : $u$ maximale, donc constante.
- au meilleur confort : $a = $ cte,

alors
$$\frac{m(\tau)}{m(0)} = e^{-\frac{a}{u}\tau}$$

Effectivement maximal pour $u$ maximale, c'à d. $u = 1$, intérêt d'éjecter de la lumière (les neutrinos sont peu contrôlables !).

Avec $\begin{cases} \text{carburant} = \text{matière} \\ \text{comburant} = \text{antimatière} \end{cases}$

et un miroir parabolique




?

Voyage :

$$0 \xrightarrow[a]{u} \underset{\text{retournement}}{\tau_M} \xrightarrow[-a]{-u} \tau_a = 2\tau_M$$

$D/2 = 15000$ ans $\qquad D = 30000$ ans

$$\frac{m(\tau_M)}{m(0)} = e^{-\frac{a}{u}\tau_M} \qquad \frac{m(\tau_a)}{m(\tau_M)} = e^{-\frac{a}{u}(\tau_a - \tau_M)}$$

$$\Longrightarrow \frac{m(\tau_a)}{m(0)} = \left(e^{-\frac{a}{u}\tau_M}\right)^2$$

Moteur à lumière : $u = 1$, $\quad \dfrac{m(\tau_a)}{m(0)} = \left(e^{-a\tau_M}\right)^2$

Accélération propre constante $a = g = 1\ \text{an}^{-1}$ :

$$a x = \operatorname{ch} a \tau$$

$$a\left(\frac{1}{a} + X\right) = \operatorname{ch} a\tau$$

$$1 + a X = \operatorname{ch} a \tau \quad \Longrightarrow \quad a\frac{D}{2} \sim \frac{1}{2} e^{a\tau_M}$$

$1\ \text{an}^{-1}$ ↗ ↖ 15000 ans

$$e^{a\tau_M} \sim aD$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m(\tau_a)}{m(0)} \sim \frac{1}{(aD)^2}} = \frac{1}{(1\times 3\times 10^4)^2} = 1{,}1 \times 10^{-9}$$

$$\frac{m(\tau_a)}{m(0)} \simeq 10^{-9} \quad !!$$

pour amener 1 tonne au centre de la galaxie, il faut partir avec $10^9\ t = 10^9\ m^3$ d'eau $= (10^3\ m)^3$ soit un cube d'eau de 1 km de côté !

Accélérer à $9{,}81\ m\ s^{-2}$ pendant plus de quelques minutes est rédhibitoire.

La masse (totale) n'est pas (toujours) conservée

Différence fondamentale avec la relativité galiléenne.
La masse totale peut être conservée (réactions élastiques, $a + b \to a' + b'$), mais $\exists$ contre exemples :

1) ~~La~~ fusée qui éjecte de la lumière

masse totale : $m(0) \to m(\tau) + 0 \quad < m(0)$

2) Annihilation $e^- + e^+ \longrightarrow 2\gamma$

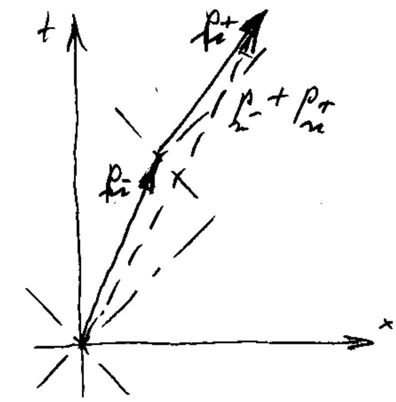
masse totale : $2 \times 0{,}51$ MeV $\neq$ deux fois rien

Remarque : la réaction $e^- + e^+ \longrightarrow \gamma$

$$\underbrace{p_-}_{\text{temps}} + \underbrace{p_+}_{\text{temps}} = \underbrace{k}_{\text{lumière}}$$

est incompatible avec la conservation de l'énergie-impulsion car la somme de deux 4-vecteurs genre espace ne peut être du genre lumière !

Et d'ailleurs cette réaction n'est pas observée.

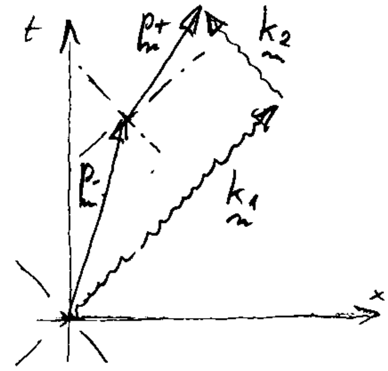



Mais qu'en est-il de

$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma + \gamma \quad ?$$

$$\underbrace{\underset{\sim}{p}_-}_{\text{temps}} + \underbrace{\underset{\sim}{p}_+}_{\text{temps}} = \underbrace{\underset{\sim}{k}_1}_{\text{lum.}} + \underbrace{\underset{\sim}{k}_2}_{\text{lum.}}$$

Réaction compatible avec la conservation de la 4-impulsion, et qui est d'ailleurs observée.




## La masse n'a pas de centre

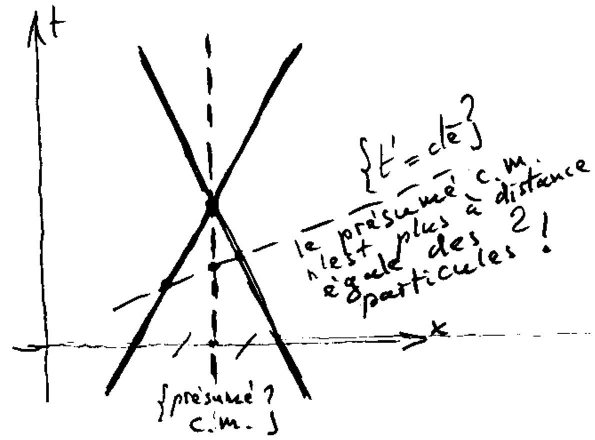
Essayons le vieux truc bien pratique en mécanique "classique" :

$$\vec{R}(t) \triangleq \frac{\sum_i m_i \, \vec{r}_i(t)}{\sum_i m_i}$$

→ problème avec la simultanéité (dépendante du repère)

→ problème avec la non conservation (peut même devenir nulle)

Même en cas de diff. élastique ($\Sigma m$ conservée), il reste la simultanéité qui pose problème. Pour 2 particules identiques par ex. :




Et pourtant les physiciennes parlent toujours du repère du "centre de masse" !?

Elles entendent par là : repère dans lequel l'impulsion totale $\vec{P}^* \triangleq \Sigma \vec{p}^* = 0$.

Ce repère existe toujours (même pour deux photons ! sauf configuration pathologique, et justement pas pour un seul photon).

Pour un système $\left\{\begin{array}{l} E = \Sigma E_i \\ \vec{P} = \Sigma \vec{p_i} \end{array}\right.$ / labo de Juliette

choix $\hat{x} \propto \vec{P}$,

pour un Roméo en configuration standard :

$$\left\{\begin{array}{l} E' = \gamma(\beta)\,(E - \beta P^x) \\ P^{x'} = \gamma(\beta)\,(P^x - \beta E) \\ P^{y'} = P^y = 0 \\ P^{z'} = P^z = 0 \end{array}\right.$$

Parmi l'$\mathrm{cs}^{\mathrm{te}}$ de prétendants, pas difficile de trouver un Roméo pour qui $P^{x*} = 0$ ;

il suffit que son $\beta^* = \dfrac{P^x}{E}$

Alors : $\vec{P}^* = 0$,

$$\vec{\beta}_{\text{"c.m"}/\text{labo}} = \beta^* \hat{x} = \frac{P^x \hat{x}}{E}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\beta}_{\text{"c.m"}/\text{labo}} = \frac{\vec{P}}{E}}$$ totales / labo

La masse invariante

Pour un système de particules : $\sum_i \underset{\sim}{p}_i = \underset{\sim}{P} = \sum_f \underset{\sim}{p}_f$

$\Rightarrow \quad \boxed{M^2 \hat{=} \underset{\sim}{P}^2}$ constante du mouvement invariant

masse invariante du système,

Avant, après, dans n'importe quel repère ... c'est tout pareil (valeur caractéristique du système)

P. ex, $\underbrace{\bar{\nu}_e}_{?} + \underbrace{p}_{\text{repos/labo}} \longrightarrow n + e^+$ au seuil ?

$$(\underset{\sim}{p}_\nu + \underset{\sim}{p}_p)^2 = M^2 = (\underset{\sim}{p}_n + \underset{\sim}{p}_e)^2$$

Seuil ? Énergie minimale du système $(n, e^+)$ :

$E' = E'_n + E'_e$ avec $E'_n$ et $E'_e$ minimales

$\Rightarrow E'_n = m_n$, $E'_e = m_e$

donc $\vec{p}_n{}' = \vec{p}_e{}' = 0$, donc $\vec{p}_n{}' + \vec{p}_e{}' = 0$, c'est le "repère du centre de masse".

Alors :

$$p_\nu + p_p \quad \Big| \quad p_n + p_e$$

/labo : $\quad \begin{cases} p_\nu \\ \vec{p}_\nu \end{cases} \quad \begin{cases} m_p \\ \vec{0} \end{cases} \qquad$ /"c.m." au seuil : $\quad \begin{cases} m_n \\ \vec{0} \end{cases} \quad \begin{cases} m_e \\ \vec{0} \end{cases}$

$$(p_\nu + m_p)^2 - (\vec{p}_\nu + \vec{0})^2 = (m_n + m_e)^2 - (\vec{0} + \vec{0})^2$$

$$2 p_\nu m_p + m_p^2 = (m_n + m_e)^2$$

$$p_\nu = \frac{(m_n + m_e)^2 - m_p^2}{2 m_p} = \frac{(939{,}57 + 0{,}511)^2 - 938{,}27^2}{2 \times 938{,}27}$$

$p_\nu = 1{,}81$ MeV, de tous les neutrinos de désintégration $\beta$, $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$, qui sortent d'un réacteur de l'EDF, seuls ceux qui ont $E_\nu > 1{,}8$ MeV vont réagir, faiblement avec l'eau (des protons) ; les autres sont indétectés.

Vitesse du "c.m." / labo ?

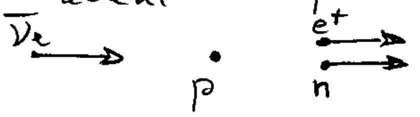
$$\vec{\beta}_{c.m.} = \frac{\vec{P}}{E} = \frac{\vec{p}_\nu + \vec{0}}{p_\nu + m_p} = \beta_{c.m.} \, \hat{p}_\nu$$

$$\beta_{c.m.} = \frac{p_\nu}{p_\nu + m_p} = \frac{(m_n + m_e)^2 - m_p^2}{(m_n + m_e)^2 + m_p^2} \qquad \text{(au seuil)}$$

$n$ et $e^+$ ont alors une vitesse /c.m nulle

$$\Rightarrow \vec{v}_{n/lab} = \vec{v}_{e/lab} = \vec{\beta}_{c.m.} \qquad \text{(au seuil)}$$

vitesses avant après /labo, au seuil



Autre exemple : la désintégration du pion au repos

$$\underbrace{\pi^-}_{\text{repos}} \longrightarrow \underbrace{\mu^-}_{E_\mu\ ?} + \underbrace{\overline{\nu_\mu}}_{\substack{\text{inutile de l'observer ?} \\ \text{(espérons-le !)}}}$$

$$\underset{\sim}{p_\nu} = \underset{\sim}{p_\pi} - \underset{\sim}{p_\mu}$$ (truc du métier : écrire la 4-impulsion non observée, en fonction des autres, puis élever au carré)

$$\Rightarrow \underset{\sim}{p_\nu}^2 = (\underset{\sim}{p_\pi} - \underset{\sim}{p_\mu})^2$$

$$m_\nu^2 = m_\pi^2 - 2\, \underset{\sim}{p_\pi} \cdot \underset{\sim}{p_\mu} + m_\mu^2$$ (l'énergie et l'impulsion non observées n'interviennent plus)

$$0 = m_\pi^2 - 2 \begin{Bmatrix} m_\pi \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_\mu \\ \vec{p_\mu} \end{Bmatrix} + m_\mu^2$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2 m_\pi} \doteq \frac{140^2 + 106^2}{2 \times 140} = 110 \text{ MeV}$$

Mais la seule considération des constantes du mouvement (intégrale première) est impuissante à nous donner la proba de désintégration, ou la vie moyenne du pion. (C'est l'affaire d'un calcul d'interaction faible dans le cadre de la théorie quantique des champs.)

## Effet Doppler

Calcul désormais bcp + direct avec les notions
- de 4-impulsion du photon $\underset{\sim}{k}$
- et de 4-vitesse de l'observatrice $\underset{\sim}{U}$

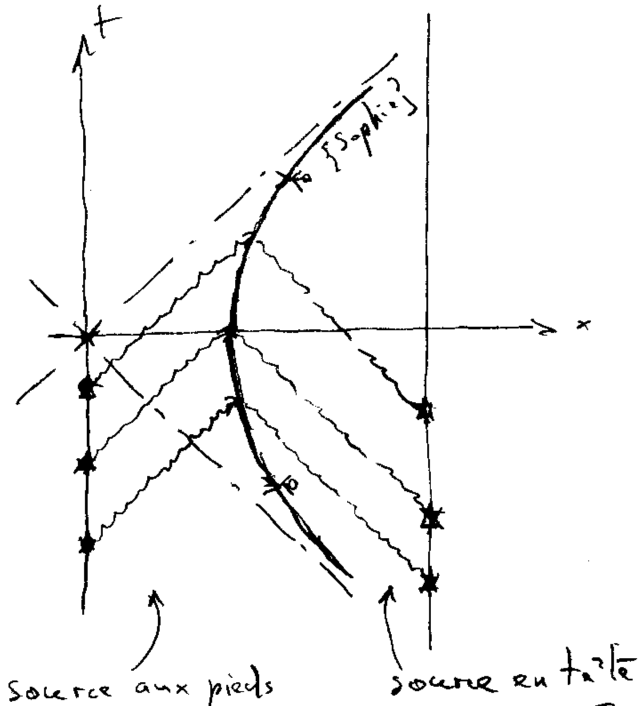
Dans le repère de Sophie (ou son repère comobile à la réception si elle n'est pas inerte)

$$\underset{\sim}{U} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}, \quad \underset{\sim}{k} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} k_{/s} \\ \vec{k}_{/s} \end{Bmatrix}$$

et $E_{/s} = k_{/s} = \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{k}$ scalaire, calculable dans n'importe quel repère !

Par exemple : pour Sophie en mvt rectil. à accél. pr. cte dans un monde d'étoiles monochromatiques fixes les unes /aux autres

Quand Sophie regarde le monde à ses pieds, ou le monde au-dessus de sa tête (effet Doppler frontal) :




dans le repère du monde des sources ...

$$\underset{\sim}{U}_{Soph} = \begin{cases} \operatorname{ch} a\tau \\ \operatorname{sh} a\tau \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Pour Sophie :

$$E = \underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{U}_{Soph}$$

Source aux pieds :

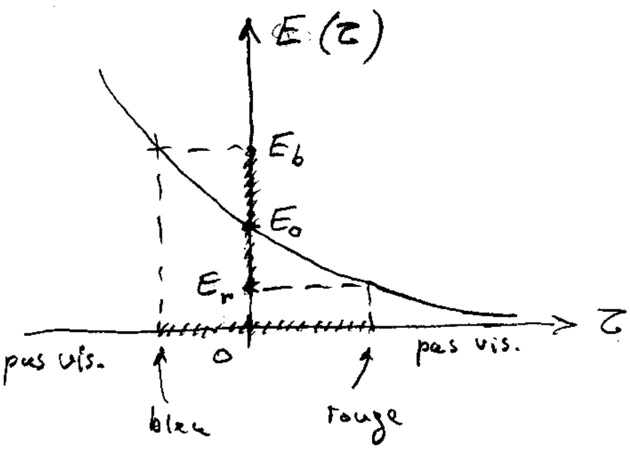
$$\underset{\sim}{k} = \begin{cases} E_0 \\ E_0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$E = E_0 (\operatorname{ch} a\tau - \operatorname{sh} a\tau) = E_0 \, e^{-a\tau}$$

Source en tête :

$$\underset{\sim}{k} = \begin{cases} E_0 \\ -E_0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$E = E_0 (\operatorname{ch} a\tau + \operatorname{sh} a\tau) = E_0 \, e^{a\tau}$$

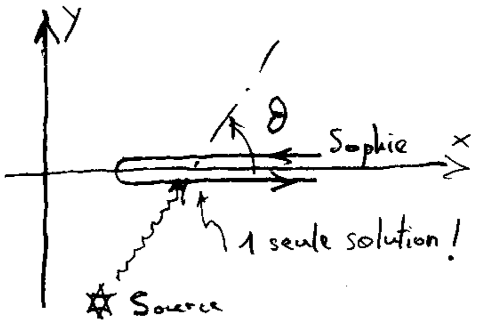


Et si Sophie a un regard oblique (Doppler général) ?

Choix d'axes du monde :

$\hat{x}$ $\propto$ trajectoire de Sophie, dans le sens de son accélération (des pieds $\longrightarrow$ tête)

$\hat{y}$ t.q. $(\hat{x}, \hat{y}) \ni$ source regardée




$$\underset{\sim}{k} = \begin{cases} E_0 \\ E_0 \cos\vartheta \\ E_0 \sin\vartheta \\ 0 \end{cases}$$

$$E = E_0 \left( \operatorname{ch}a\tau - \cos\vartheta \operatorname{sh}a\tau \right)$$

attention : c'est pas l'angle zénithal dans le repère (comobile) de Sophie.

## Effet Compton

$$\underbrace{\gamma}_{\text{incident}} + \underbrace{e^-}_{\text{repos}} \longrightarrow \underbrace{\gamma}_{\text{énergie ?}} + \underbrace{e^-}_{\text{pas observé}}$$

$$\underset{\sim}{k} + \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{k}' + \underset{\sim}{p}'$$

Toujours le même truc des pros pour éliminer d'emblée les caractéristiques de l'électron sortant auquel on ne s'intéresse pas ici (sinon, le calcul peut être très long !).

$$\underset{\sim}{p}'^2 = \left( \underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{k} - \underset{\sim}{k}' \right)^2$$

$$m^2 = m^2 + 2 \underset{\sim}{p} \cdot \left( \underset{\sim}{k} - \underset{\sim}{k}' \right) - 2 \underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{k}'$$


$$0 = 2m(E - E') - 2EE'(1 - \cos\vartheta)$$

$$E - E' = \frac{EE'}{m}(1 - \cos\vartheta)$$

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m}(1 - \cos\vartheta) \qquad \text{(en syst. "}c = 1\text{")}$$

$$E = \omega \qquad (\text{en } "\hbar = 1")$$
$$\omega = \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}} \qquad (\text{en } "c = 1")$$

$$\Rightarrow \quad \lambda\!\!\!^{-}{}' - \lambda\!\!\!^{-} = \frac{1}{m}\,(1-\cos\vartheta) \qquad ("\hbar = c = 1")$$

En unités légales ?

$$[\hbar c] = \mathcal{E}\,\mathcal{L} \qquad \hbar c = 197 \text{ MeV fm}$$
$$[mc^2] = \mathcal{E} \qquad mc^2 = 0{,}511 \text{ MeV}$$

$$\lambda\!\!\!^{-}{}' - \lambda\!\!\!^{-} = \underbrace{\frac{\hbar c}{mc^2}}\,(1-\cos\vartheta)$$

$$\lambda\!\!\!^{-}_c = \frac{197}{0{,}51} = 385 \text{ fm}$$ longueur d'onde Compton de l'électron

Mais pour avoir la proba de diffusion dans une direction $\vartheta$ donnée il faut se taper un calcul d'Electro Dynamique Quantique.

<u>Accélérateur Compton</u>

Toujours $\quad \gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-$

en rétro diffusion sur un électron pas au repos.

Avant : $\quad \xrightarrow{\ \vec{p}\ } \quad \overset{\vec{k}}{\leftsquigarrow}$

Après : $\quad \xrightarrow{\ \vec{p}\,'\ } \quad \overset{\vec{k}'}{\rightsquigarrow}$

pour "accélérer" des photons. (P. ex. diffusion d'un faisceau laser visible cohérent sur un faisceau d'électrons $\longrightarrow$ faisceau X cohérent).

<u>Ici</u>, on n'est pas intéressé par l'électron final.
Tj. le même truc :

$$\underset{\sim}{p}'^{\,2} = (\underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{k} - \underset{\sim}{k}')^2$$
$$m^2 = m^2 + 2\,\underset{\sim}{p}\cdot\underset{\sim}{k} - 2\,\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{k}' - 2\,\underset{\sim}{p}\cdot\underset{\sim}{k}'$$

$$(\underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{k})\cdot\underset{\sim}{k}' = \underset{\sim}{p}\cdot\underset{\sim}{k}$$

$$\begin{Bmatrix} E+\omega \\ Ev-\omega \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega' \\ \omega' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E \\ Ev \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega \\ -\omega \end{Bmatrix}$$

$$\left[(E+\omega)-(Ev-\omega)\right]\omega' = E\omega\,(1+v)$$

$$\left[E\,(1-v)+2\omega\right]\omega' = E\omega\,(1+v)$$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1+v}{1-v+2\frac{\omega}{E}} \quad , \qquad \text{avec } v = \frac{p}{E} = \sqrt{\frac{E^2-m^2}{E^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{m}{E}\right)^2}$$

En ultra relativiste ?

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-v^2} \Longrightarrow v^2 = 1-\frac{1}{\gamma^2}$$

$$v \simeq 1-\frac{1}{2\gamma^2}$$

$$\frac{\omega'}{\omega} \sim \frac{2-\frac{1}{2\gamma^2}}{\frac{1}{2\gamma^2}+2\frac{\omega}{E}} \sim \frac{4\gamma^2}{1+4\frac{\gamma^2\omega}{\gamma m}}$$

$$\frac{\omega'}{\omega} \underset{E\gg m}{\sim} \frac{4\frac{E^2}{m^2}}{1+4\frac{E\omega}{m^2}}$$

Rétro diffusion des photons du fond cosmique sur les protons du rayon$^{nt}$ cosmique :

Photon typique $\quad \bar{\omega} = 2{,}73\ K = 2{,}73 \times \frac{8{,}3\ J}{6\times10^{23}}$

$$\bar{\omega} = 2{,}73 \times \frac{8{,}3}{6\times10^{23}}\ \frac{1\ eV}{1{,}6\times10^{-19}}$$

$$\bar{\omega} = 2{,}4\times10^{-4}\ eV$$

Proton p. ex. $\quad E = 10^{20}\ eV \qquad$ (oui, ça arrive !)

$$m = 0{,}94\times10^{9}\ eV$$

$$\Rightarrow \gamma \simeq 10^{11}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega'}{\bar{\omega}} \simeq \frac{4\times(10^{11})^2}{1+4\times10^{11}\times\frac{2{,}4\times10^{-4}}{10^9}} = 4\times10^{22}$$

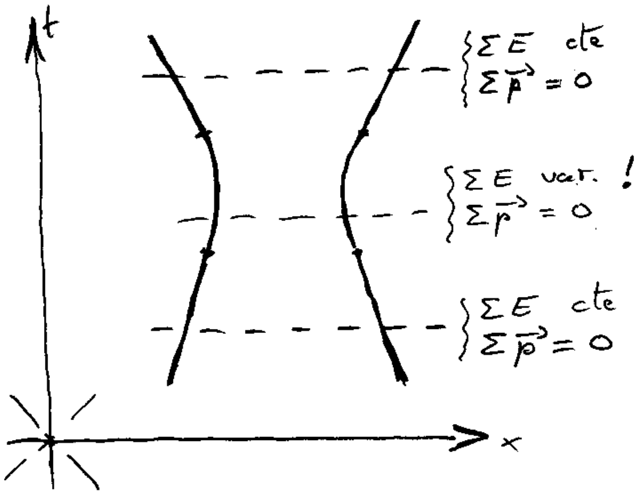
$$\omega' = 4\times10^{22}\times2{,}4\times10^{-4} = 10^{19}\ eV \quad !$$

$\Rightarrow$ il faut s'attendre à trouver des photons ayant ces énergies.

# À propos de la conservation de la quadri-impulsion totale

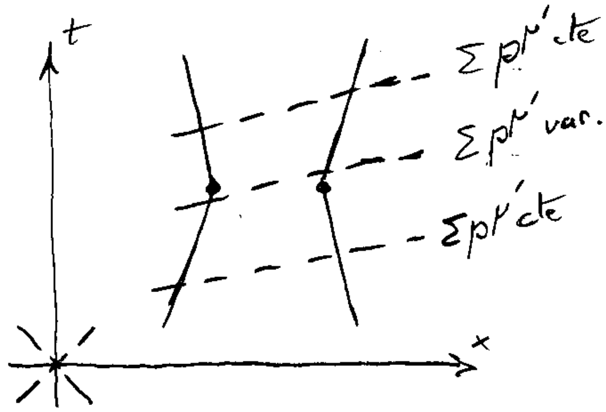
Quelques scénarios de fictions...

Deux particules en interaction à distance :




$\Longrightarrow$ Scénario incompatible avec la conservation de $\underset{\sim}{P}$ totale !?

Avec une interaction à distance plus localisée :



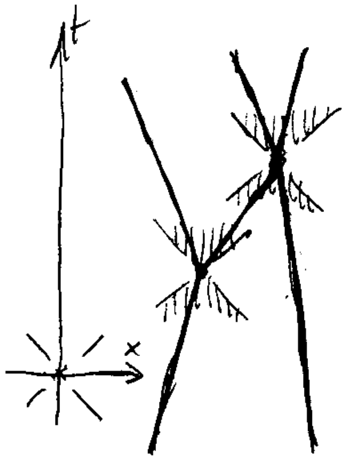

Toutes composantes $\Sigma p^\mu$ conservées en tous $t$

mais

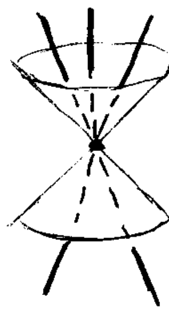
$\Sigma p^{\mu'}$ pas conservées en tous $t'$

$\Longrightarrow$ scénario incompatible avec &c...

$\Longrightarrow$ En fait, on ne peut avoir conservation (à tout instant) de $\underset{\sim}{P}$ totale (c.à d par rapport à tout repère) que pour des scénarios du genre :




c'à d. des changements de vitesses uniquement par



vertex (choc)

de particules subluminales

Conclusion :

Avec des particules et la conservation de $\underset{\sim}{P}$ totale à tout instant, on ne peut avoir que des interactions localisées (chocs)

C'est un bon modèle pour des réactions vues de loin (/ portée de l'interaction).

Mais pour des "vraies" interactions à distance (portée infinie), c'à d. électromagnétique ou gravitationnelle ?

Scénario :


Si on adhère au principe de conservation de $\underset{\sim}{P}$ totale, il faut faire intervenir qqchose de plus qui :
- véhicule de l'énergie-impulsion;
- n'est pas représentable par une ligne d'univers (donc pas une particule).

$\Longrightarrow$ une infinité de particules échangées, ou mieux, un champ.

Mais ceci est une (presque) toute autre histoire.

1) particule source $\xrightarrow{\ ?\ }$ champ, disons $S(x^0, x^1, x^2, x^3)$ scalaire

pour fin d'analyse $\dfrac{\partial S}{\partial x^0}, \dfrac{\partial S}{\partial x^1}, \ldots$

dérivées covariantes (comportement / T.L. inverse des $x^0, x^1, x^2, x^3$ contravariantes)

$\Longrightarrow$ notion de composantes covariantes, dérivée covariante $\partial_\mu S \hat{=} \dfrac{\partial S}{\partial x^\mu}$

2) Action du champ sur une particule ?

Particule libre : $\vec{v} = cte$

$\Rightarrow$ particule pas libre, c'à d. en interaction : $\vec{v}$ variable

équation du mvt : $m \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{?}$

ou, de manière équivalente mais qui exhibe explicitement l'invariance relativiste :

$$\frac{d\underset{\sim}{p}}{d\tau} = \underset{\sim}{?}$$

p.ex $$\frac{dp^\mu}{d\tau} = V^\mu\left(x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau)\right)$$

champ (4)vectoriel.

alors, pour fin d'analyse, intervention des

$\partial_\alpha V^\mu$ 2 indices, composantes tensorielles.

Conclusion :

$\left\{\begin{array}{l}\text{interaction à distance}\\ \text{conservation de } \underset{\sim}{P}\ \text{tot}\end{array}\right.$

exige champ,

exige (pratiquement) $\left\{\begin{array}{l}\text{dérivée covariante}\\ \text{composantes covariantes}\\ \text{tenseurs.}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ un peu plus de formalisme.

That's all folks

# LECTURES ÉDIFIANTES

Les exposés terriblement formels ne manquent pas, surtout dans la tradition nationale. J'indique plutôt ici, et pour aller au delà de la tentative d'insémination licencieuse dont vous avez été victime, quelques ouvrages non conformistes présentant d'excellentes introductions à la relativité dite restreinte, à l'électrodynamique, à la gravitation, dite relativité générale, et à la cosmologie.

- E.F. Taylor, J.A. Wheeler, <u>À la découverte de l'espace-temps et de la physique relativiste</u>, Dunod 1970
  Un petit livre délicieusement anecdotique. Les concepts fondamentaux sans scorie formaliste. En français. Ne se trouve plus que dans les bonnes bibliothèques.
- E.F. Taylor, J.A. Wheeler, <u>Spacetime physics: introduction to special relativity; second edition</u>, Freeman 1992
  Les mêmes, 20 ans après. Édition considérablement augmentée. Encore plus d'anecdotes, mais moins concis.
- W. Rindler, <u>Relativity: special, general and cosmological</u>, Oxford University Press 2001
  Formalisme parfaitement expliqué par un expert, mais dans une perspective toujours physique.
- J.B. Hartle, <u>Gravity: an introduction to Einstein's general relativity</u>, Addison Wesley 2003
  Original et récent. Le meilleur rapport physique / formalisme.
- R.H. Price, <u>General relativity primer</u>, American Journal of Physics <u>50</u> (1982) 300
  Excellente introduction à la gravitation. À photocopier dans une bibliothèque.

Paris 7
févr. 2004

# RELATIVITÉ