

1 **La Pomme, Newton et l'Astronaute**

Une Astronaute à la dérive est soumise à la seule attraction terrestre.

1. Une Pomme est proche de A, à sa verticale. Estimer la dérivée seconde de la distance  $y(t)$  de P à A (en fonction de  $G$ ,  $M_{\oplus}$ , ou  $g$  et  $R_{\oplus}$ ,  $r_A$  et  $y$ ).

2. La Pomme est encore proche de A, mais à la même altitude. Estimer la dérivée seconde de la distance  $x(t)$  de P à A (en fonction de ... et  $x$ ).

2 **Une expérience de pensée**

Diane rêve qu'elle tombe dans un puits. Sa situation tourne au cauchemar lorsqu'elle perd son paquet de cigarettes et son briquet, séparés par une distance  $d$  qu'elle est à même de mesurer avec une précision  $\delta$ . Quelle doit être la profondeur  $h$  du puits pour que Diane puisse mettre en évidence la rotondité de la Terre ?

3 **Des coordonnées qui cachent l'espace**

1. Soit la métrique  $ds^2 = dv^2 - v^2 du^2 - dy^2 - dz^2$ . On effectue le changement de coordonnées

$$\begin{cases} v = (t^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \\ u = \arg \operatorname{th} \frac{x}{t} \end{cases} .$$

Quelle est la métrique de ce *même* espace dans ces *nouvelles* coordonnées ?

2. Soit l'espace euclidien  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

i) Que devient sa formule métrique en fonction des coordonnées définies par

$$\begin{cases} x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi \\ y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi \\ z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \end{cases} ?$$

ii) Etudier la forme des lignes de coordonnées  $(\xi, \eta, \varphi)$  dans le système de coordonnées  $(x, y, z)$ .

4 **Tous les marins du monde**

Soit l'espace, maintenant bien exploré, de métrique  $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ .

1. Quelle est la métrique dans les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} x \stackrel{\text{df}}{=} a \varphi \\ y \stackrel{\text{df}}{=} a \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \end{cases} ?$$

2. Développer cette métrique en puissances de  $x$  et  $y$  au voisinage d'un point sur le méridien de Greenwich à l'équateur (quelque part en pleine mer, au sud du Ghana et à l'ouest du Gabon) ?

3. Ecrire les expressions des coefficients  $g_{xx}$ ,  $g_{yy}$  et  $g_{xy}$  de cette métrique au voisinage de ce point, et en déduire que les coordonnées  $(x, y)$  sont localement plates.

4. En déduire la métrique des coordonnées  $\bar{x}, \bar{y}$ , telles que

$$\begin{cases} x = \cos \alpha \bar{x} + \sin \alpha \bar{y} \\ y = -\sin \alpha \bar{x} + \cos \alpha \bar{y} \end{cases} ,$$

au voisinage du même point. Sont-ce des coordonnées localement plates ?

5. Quelle est, toujours au voisinage du même point, la métrique des coordonnées  $x', y'$ , telles que

$$\begin{cases} x = x' + \frac{x' y'^2}{a^2} \\ y = y' + \frac{x'^3}{a^2} \end{cases} ?$$

Sont-ce encore des coordonnées localement plates ?

## 5 Equations des géodésiques

Dans un espace métrique  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ .

1. Montrer qu'une "distance" invariante pour se rendre de A à B le long de la courbe paramétrée  $x^\mu(\lambda)$ , est de la forme

$$S_{AB} = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \mathcal{L}(x^\beta, \dot{x}^\beta),$$

avec  $\dot{x}^\mu \stackrel{\text{df}}{=} dx^\mu/d\lambda$ , et explicitez la fonction  $\mathcal{L}$ .

2. En déduire, à l'aide des équations de Lagrange, que si  $x^\mu(\lambda)$  est une géodésique, elle est solution du système différentiel

$$\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \dot{x}^\alpha \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}.$$

3. On dit que la paramétrisation d'une courbe  $x^\mu(\lambda)$  est affine si elle est telle que  $g_{\mu\nu}(x^\alpha(\lambda)) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  reste constante en tout point de cette courbe.

i) Si cette courbe est du genre lumière, quelle est son équation différentielle ?

ii) Si cette courbe est une géodésique du genre temps, utiliser le résultat de la question 2 pour en déduire son système différentiel.

iii) Soit une particule de ligne d'univers  $x^\mu(\lambda)$  et d'impulsion  $p^\mu(\lambda)$ . Montrer que la paramétrisation  $\lambda$  définie par  $dx^\mu/d\lambda \stackrel{\text{df}}{=} p^\mu$  est affine, quelle que soit la masse de la particule. Dans le cas d'une particule massive, quel rapport y a-t-il entre  $\lambda$  et le temps propre  $\tau$  de la particule ?

4. Dans le cas d'une particule massive en paramétrisation affine, on pose  $\mathcal{F} \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{L}^n$ .

i) Exprimer

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha}$$

en fonction de  $\mathcal{L}$  et de ses dérivées. En déduire que l'intégrale  $\int_A^B d\lambda \mathcal{F}$  est elle aussi extrémale.

ii) Choissant  $\mathcal{F} \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{L}^2$ , retrouver directement, à l'aide des équations de Lagrange, l'expression du système différentiel caractérisant la géodésique en paramétrisation affine, déjà obtenue en 3.ii.

iii) Que devient ce système différentiel au voisinage d'un point, dans un système de coordonnées localement plates en ce point ?

## 6 Cherchez l'erreur

Ayant déterminé une géodésique  $x^\mu(\lambda)$  d'un espace, vous connaissez maintenant, sur celle-ci, les valeurs du lagrangien  $\mathcal{L}(\lambda)$  qui se trouve être variable,  $d\mathcal{L}/d\lambda \neq 0$ . Vous désirez alors trouver une paramétrisation affine  $\lambda'(\lambda)$  pour cette géodésique, autrement dit telle que  $d\mathcal{L}/d\lambda' = 0$ , donc  $(d\mathcal{L}/d\lambda)(d\lambda/d\lambda') = 0$ , donc  $d\lambda/d\lambda' = 0$  !

## 7 Précaution

Jamais trop prudent, on se propose de vérifier qu'une droite  $x^0(\lambda) = \lambda^2$ ,  $x^1(\lambda) = v\lambda^2$ ,  $x^2(\lambda) = x^3(\lambda) = 0$ , dans l'espace-temps de Minkowski est une géodésique de cet espace, puis en trouver une paramétrisation affine.

1. Calculer le lagrangien  $\mathcal{L}(\lambda) \stackrel{\text{df}}{=} ds/d\lambda$  correspondant à cette droite.

2. En déduire le facteur  $(1/\mathcal{L}(\lambda))(d\mathcal{L}/d\lambda)$ , et vérifier que la droite en question est bien solution de l'équation des géodésiques.

3. À l'aide de l'expression trouvée pour  $\mathcal{L}(\lambda)$ , déterminez une paramétrisation affine  $\lambda'(\lambda)$  pour cette même droite, c'est-à-dire telle que  $\mathcal{L}'(\lambda') d\lambda' = \mathcal{L}(\lambda) d\lambda$ , avec  $\mathcal{L}'(\lambda') = \text{cte}$ .

## 8 Dans l'espace (et les coordonnées) $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ .

1. Etablir les équations différentielles des coordonnées paramétriques des géodésiques.

2. Vérifier que les "courbes"  $\theta = \text{cte}$ . sont des géodésiques.

3. Etablir la solution générale des équations des géodésiques.

- 9 Dans l'univers marin  $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ .
1. Etablir les équations différentielles des orthodromies.
  2. Vérifier que les courbes  $\varphi = \text{cte.}$  et les courbes  $\theta = \frac{\pi}{2}$  sont des orthodromies.
  3. Etablir la solution générale des équations des orthodromies.

## 10 Bases de coordonnées, bases locales orthonormées

Exprimer les vecteurs de la base locale, orthonormée, traditionnelle au cours préparatoire, en termes des vecteurs de la base des coordonnées, pour l'espace (et les coordonnées) :

- i)  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$ ,
- ii)  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ ,
- iii)  $ds^2 = a^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$ .

## 11 Retour à Euclide

On est dans l'espace  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , et il est, pour une fois, rigoureusement interdit de faire aucun dessin avant que ce ne soit expressément demandé !

1. Déterminer la formule métrique dans les coordonnées  $(r, \theta)$  définies par  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .
2. Ecrire les développements d'un déplacement infinitésimal  $d\mathbf{s}$  sur les bases de coordonnées  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$  et  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$  respectivement.
3. En déduire les développements de  $\underline{e}_r$  et  $\underline{e}_\theta$  sur la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ .
4. En déduire les valeurs des symboles de Christoffel (de cet espace, dans les coordonnées  $r, \theta$ ) :  $\Gamma_{rr}^r, \Gamma_{r\theta}^r, \Gamma_{\theta r}^r, \Gamma_{\theta\theta}^r, \Gamma_{rr}^\theta, \dots$
5. Représenter le plan euclidien, les vecteurs de base  $\underline{e}_x$  et  $\underline{e}_y$  (on n'a évidemment pas démontré que  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  entraîne, analytiquement, toutes les propriétés connues de la géométrie d'Euclide ; vous pouvez essayer en commençant par la droite, le postulat d'Euclide, le théorème de Pythagore, &c...), des lignes d'égales coordonnées  $r$  ou  $\theta$ , quelques vecteurs de base  $\underline{e}_r$  et  $\underline{e}_\theta$ .
6. Même questions pour l'espace  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , et les coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  telles que  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ .

## 12 Deux théories du monde

A la suite de nombreuses expériences, Euclide propose une théorie du monde qui, à deux points, associe la distance invariante  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . Après bien d'autres expériences, Haddock propose plutôt la théorie  $ds^2 = a^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$ .

1. Soit un cercle (ensemble des points à distance  $r$  d'un point donné) de rayon  $r$ , circonférence  $\mathcal{C}$ , aire  $\mathcal{A}$ . Quelles sont les valeurs de la combinaison  $2\mathcal{A}/r\mathcal{C}$  prédites respectivement par les théories d'Euclide et de Haddock ?
2. En quoi la théorie de Haddock peut-elle être considérée comme localement euclidienne ?
3. Euclide dispose d'un procédé de mesure des longueurs doué d'une précision relative de  $10^{-4}$ . Quelle doit être la dimension de son laboratoire pour qu'il puisse mettre en évidence une déviation par rapport à la prédiction de sa théorie ?

## 13 Autres coordonnées, autre base des coordonnées

Soit l'espace métrique  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$ . Déterminer les vecteurs de base de ces coordonnées en fonction des vecteurs de base des coordonnées  $x \stackrel{\text{df}}{=} r \cos \vartheta$ ,  $y \stackrel{\text{df}}{=} r \sin \vartheta$ .

## 14 Gradient en coordonnées sphériques

Soit l'espace  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ , le champ scalaire  $S$ , et le champ  $\underline{\text{grad}}S$ , défini par ses composantes telles que :  $dS = (\underline{\text{grad}}S)_\mu dx^\mu$ .

1. Calculer directement le développement de  $\underline{\text{grad}}S$  sur la base des coordonnées  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)$ .
2. En déduire le développement de  $\underline{\text{grad}}S$  sur la base orthonormée traditionnelle  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ .

**15 Petit exercice de calcul**

Calculer la somme  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}$ .

**16 Laplacien d'un champ scalaire**

Etant donné un champ scalaire  $S \dots$

1. Etablir l'expression de  $S^{;\alpha}_{;\alpha}$ , dit laplacien de  $S$ , en termes de dérivées de  $S$  et de symboles de Christoffel.

2. Montrer que, dans le cas d'une *métrique diagonale*, la somme  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}$  peut s'écrire

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = \left( \ln \sqrt{|\det[g_{\mu\nu}]|} \right)_{,\beta}.$$

En déduire l'expression correspondante du laplacien de  $S$ .

3. Etablir l'expression du laplacien de  $S$  dans l'espace euclidien à 3 dimensions. . .

i) en coordonnées sphériques,

ii) en coordonnées cylindriques.

**17 Pas malin, mais très pratique**

Que deviennent les expressions des symboles de Christoffel  $\Gamma_{11}^0$ ,  $\Gamma_{01}^0$ ,  $\Gamma_{00}^0$  et  $\Gamma_{12}^0$  dans un système de coordonnées qui diagonalisent la métrique ?

18 Calculer les symboles de Christoffel des marins :  $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\varphi^2$ .

19 Calculer les symboles de Christoffel des cosmonautes :  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$ .

20 Calculer les symboles de Christoffel des astronautes, en coordonnées de Schwartzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

21 Vérifier que la dérivée covariante d'un vecteur est bien un tenseur, c'est-à-dire que dans un changement de coordonnées tel que

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} = M^{\mu}_{\nu} dx^{\nu},$$

on a  $V'^{\mu}_{;\nu} = M^{\mu}_{\alpha} M_{\nu}^{\beta} V^{\alpha}_{;\beta}$ , avec  $M_{\nu}^{\beta} \stackrel{\text{df}}{=} (M^{-1})^{\beta}_{\nu}$  (cf. WEINBERG p. 103).

22 Montrer que les nouveaux symboles de Christoffel, après un changement de coordonnées, peuvent s'écrire :

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}},$$

1. au moyen de l'astuce

$$0 = \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \delta^{\lambda}_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \left( \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \right),$$

(cf. WEINBERG p. 101) ;

2. plus élégamment, en considérant la transformation de l'équation des géodésiques en paramétrisation affine.

- 
- 23 Dans l'univers des cosmonautes  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$ .
1. Calculer, à l'aide des symboles de Christoffel, la divergence  $V^\mu{}_{;\mu}$  d'un champ vectoriel.
  2. Exprimer cette divergence en fonction des composantes  $V^{\hat{r}}, V^{\hat{\theta}}, V^{\hat{\varphi}}$ , du champ vectoriel sur la traditionnelle base *orthonormée* associée aux coordonnées  $r, \theta, \varphi$ .
- 

- 24 Soit la matrice  $G \stackrel{\text{df}}{=} (g_{\mu\nu})$ , symétrique, réelle, et la matrice  $H$  orthogonale telle que  $G' \stackrel{\text{df}}{=} HGH^{-1}$  soit diagonale.
1. Montrez que  $\ln \det G' = \text{tr} \ln G'$ .
  2. En déduire que  $\partial_\alpha \{ \ln \det G' \} = \text{tr} \{ G'^{-1} \partial_\alpha G' \}$ .
  3. En déduire que  $\partial_\alpha \{ \ln \det G \} = \text{tr} \{ G^{-1} \partial_\alpha G \}$ .
  4. En déduire que  $\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} \partial_\beta \ln g$ , où  $g \stackrel{\text{df}}{=} \det(g_{\mu\nu})$ .
- 

- 25 Montrez les identités remarquables :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma}, \\ g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}{}_{,\gamma} &= -g^{\beta\mu} g_{\mu\alpha,\gamma}, \\ g^{\nu\beta}{}_{,\gamma} &= -g^{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta - g^{\beta\mu} \Gamma_{\mu\gamma}^\nu. \end{aligned}$$


---

- 26 Divergence d'un champ vectoriel.

1. Montrer que la divergence d'un champ vectoriel peut s'écrire

$$\begin{aligned} V^\alpha{}_{;\alpha} &= V^\alpha{}_{,\alpha} - \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma} g^{\alpha\gamma}{}_{,\beta} V^\beta \\ &= V^\alpha{}_{,\alpha} + \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\gamma,\beta} V^\beta. \end{aligned}$$

2. En déduire l'expression de la divergence dans l'espace euclidien à 3 dimensions,
    - i) en coordonnées sphériques,
    - ii) en coordonnées cylindriques.
- 

- 27 Dans le plan euclidien,  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , vous savez, d'une part et depuis pas mal d'années, que les géodésiques sont des droites et, d'autre part et depuis moins longtemps, que l'équation des géodésiques du genre temps ou espace est, en paramétrisation affine :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0.$$

En déduire les valeurs des symboles de Christoffel de la base des coordonnées polaires (telles que  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ).

---

- 28 **Un paradoxe.**

La ligne d'univers d'une particule dans un champ de gravitation est indépendante de la masse de la particule... et pourtant il existe des géodésiques  $ds^2 = 0$  qui ne sont lignes d'univers que de particules dont la masse est nulle.

---

- 29 Soit le tenseur de Riemann

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\gamma} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda - (\beta \leftrightarrow \gamma).$$

(Eh oui, c'est un tenseur !) En déduire une formule explicite pour  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \stackrel{\text{df}}{=} g_{\alpha\mu} R^\mu{}_{\beta\gamma\delta}$  (c'est, au signe près, l'expression utilisée par WEINBERG), en fonction des dérivées (secondes) des coefficients de la métrique.

---

30 Calculer les composantes des tenseurs de Riemann et de Ricci, en base des coordonnées, pour les espaces suivants :

i)  $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2$ ,

ii)  $ds^2 = a^2 d\vartheta^2 + a^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ ,

iii)  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ ,

iv)  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ .