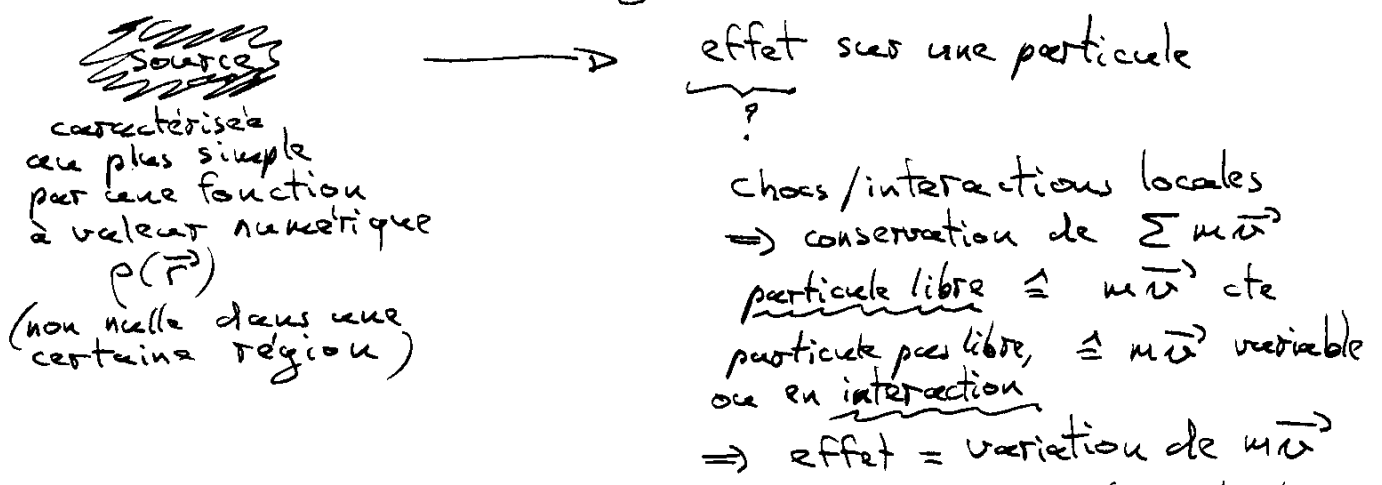


L'ÉLECTRODYNAMIQUE,
UNE RECRÉATION

(exercice d'heuristique fiction)

≈ 1700 : théorisation d'une interaction à distance, c'est courageux (rien qui ressemble plus à de la magie)



Donc chercher une théorie pour $\frac{d}{dt} m\vec{v}$ de la particule.
- c'est un vecteur (on croit à l'invariance par rotation)
- on essaye ce qu'il y a de plus simple et universel

$$\frac{d}{dt} m\vec{v} = g \vec{E}(\vec{r})$$

(Effet en \vec{r} , caractéristique de la source
(constante de couplage, caractéristique de la particule/interaction)

Ainsi, pour 2 particules placées dans les mêmes conditions:

$$\frac{d}{dt} m_1 \vec{v}_1 \propto \frac{d}{dt} m_2 \vec{v}_2$$

Reste à trouver une théorie pour $\rho(\vec{r}) \longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) \dots$
 $\vec{E}(\vec{r}) \propto \rho(\vec{r})$?

~~$\rho(\vec{r}) \neq 0$~~
 $\vec{E}(\vec{r}) \propto \rho(\vec{r})$?
dérivée spatiale

- x $\vec{E}(\vec{r}) \propto \rho(\vec{r}) = 0$
pas d'effet,
pas d'interaction à distance (hors source)
- x $\vec{E}(\vec{r}) \propto \rho(\vec{r}) = 0$
mais possibilité $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$

ρ le + simple : scalaire
 \vec{E} vecteur pour invariance } \Rightarrow + simple: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(\vec{r})}$

Principe (de simplicité) : on veut croire (jusqu'à preuve du contraire) à la conservation de l'énergie méca. dans les interactions fondamentales (pas de dissipation, de chaleur, manifestations non élémentaires).

\Rightarrow travail (circulation) indépendant du chemin, force conservative,

$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$

D'où la théorie:

$\boxed{\begin{aligned} \Delta \phi &= -\rho \\ \frac{d}{dt} m \vec{v} &= -q \vec{\nabla} \phi \end{aligned}}$

Est-elle réalisée ?

Oui, et même plutôt deux fois qu'une, pour des sources statiques, particules à basse vitesse.

1) Coulomb (≈ 1800)

$\Delta \phi = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$ ← source
 $\frac{d}{dt} m \vec{v}_i = -q_i \vec{\nabla} \phi$
 ← inerte ← charge de la particule d'épreuve

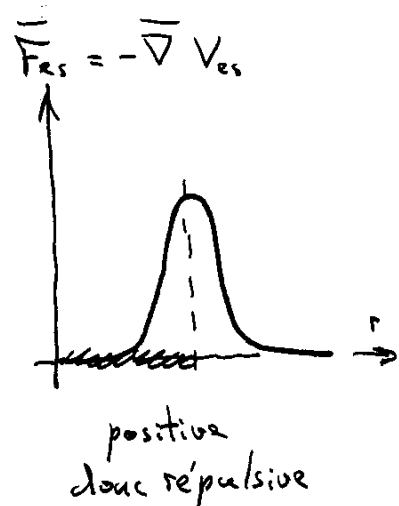
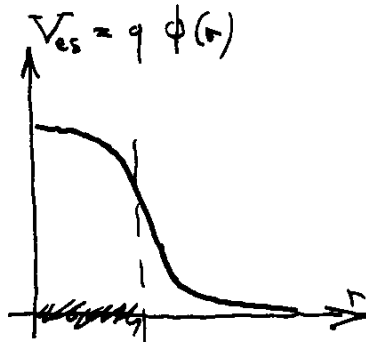
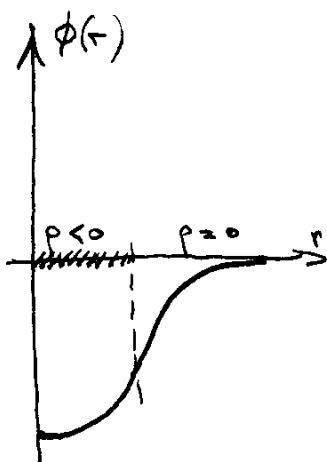
avec ϵ_0 pour :

- dimension $[\rho] = [q] \text{ m}^{-3}$
- unité de q et ρ

Existe en deux versions, attractive / répulsive

$\Rightarrow \rho, q > 0$ ou < 0

Par ex: $\rho \leq 0, q < 0$



2) Newton (≈ 1700)

N'existe qu'en version attractive,
on l'écrit plutôt

$$\begin{cases} \Delta\phi = \rho \\ \frac{d}{dt} m \vec{v} = -g \vec{\nabla}\phi \end{cases}$$

avec $\rho, g \geq 0$.

Propriété empirique : $\frac{m}{g} =$ constante universelle
quelle que soit la particule,
à 10^{-11} près !

\Rightarrow on choisit :

- la dimension de ϕ en sorte que $[m] = [g]$;
- d'introduire une constante devant ρ ,
en sorte que $[\rho] = [m] \mathcal{L}^{-3}$.

Soit

$$\begin{cases} \Delta\phi = 4\pi G \rho_s \\ \frac{d}{dt} m_i \vec{v} = -m_e \vec{\nabla}\phi \end{cases}$$

avec $m_i \approx m_e$ (masse d'épreuve)

et $\approx m_s$ lorsque la même particule

Étonnant de trouver 2 fois la même théorie réalisée dans
des ordres de grandeurs très différents (10^{-42}).

≈ 1900

Théorie de la relativité,
dont on sait même maintenant qu'elle était à peu près
inévitabile pour cause de principes

de relativité

d'homogénéité de l'espace-temps

d'isotropie de l'espace

de causalité

\Rightarrow invariance de Lorentz

Une théorie relativisée de l'interaction à distance doit :

- avoir une forme invariante / transf. de Lorentz
- restituer la théorie classique primordiale lorsque
la particule a une basse vitesse (et que la source
est statique).

Pas de processus déductif. Théorie pas unique a priori.
On cherche la plus simple...

... en commençant par la théorie de Coulomb.

Invariance / Lorentz \Rightarrow utiliser $\left\{ \begin{array}{l} \text{unités } \epsilon_0 = c = 1 \\ \text{ingrédients tensoriels} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= -\rho \\ \partial_i \partial_i \phi &= -\rho \\ -\partial_i \partial^i \phi &= -\rho \\ \partial_i \partial^i \phi &= \rho \end{aligned}$$

Essayer: $\partial_\mu \partial^\mu \phi \neq \rho$

\Rightarrow le temps entre en scène.

Alors, principe (de simplicité, anti-magique) de conservation locale des sources (cf Feynman, la Nature de la physique):

$$\rho(\vec{r}, t) \Rightarrow \exists \vec{j}(\vec{r}, t) \text{ t.q. } \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\partial_0 \rho + \partial_i j^i = 0$$

\swarrow \searrow composés de 4-vecteur

\Rightarrow l'invariance de forme de l'équation de conservation est assurée si

(ρ, \vec{j}) composés de 4-vecteur

Alors $\partial_\nu j^\nu = 0$

avec $\rho = j^0$ composés d'un 4-vecteur \underline{j}

$$\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu \phi}_{\text{scalaire}} = \rho$$

$\Rightarrow \phi$ composante 0 d'un 4-vecteur \underline{A} .

Tensoriel \Rightarrow les 4 composantes jouent nécessairement le même rôle :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu$$

(Remarque: $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ exige $\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0$)

Et pour l'équation de mouvement d'une particule d'épreuve (l'autre moitié de la théorie)? Exigences:

- une forme invariante / transf. de Lorentz
- restituer $\frac{d}{dt} m \vec{v} = -q \vec{\nabla} \phi$ si charge à basse vitesse

Commode (quoique pas nécessaire, voir l'Histoire) d'utiliser des ingrédients tensoriels. Lesquels?

Chocs, ou interactions localisées \Rightarrow

conservation de $\sum p_m$ (avec $p_m \hat{=} m_i \frac{dx_i}{dt}$)

\Rightarrow particule libre $p_m = \text{cte}$

particule pas libre $\frac{dp_m}{d\tau} \neq 0$

et en plus: $\frac{dp}{d\tau} \sim \frac{d}{dt} m \vec{v}$ super!

Dans un repère (inertiel) où la particule a une vitesse nulle (en un événement choisi):

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} \sim \frac{d}{dt} m \vec{v} = -q \vec{\nabla} \phi$$

$$\frac{dp_i}{d\tau} = q \partial_i A^0$$

compte
de 4-vect.

\Rightarrow si on l'écrit comme compte de 4 vecteur, c'est gagné pour tous repères!

Facile:

- d'abord $\frac{dp_\alpha}{d\tau} = q \partial_\alpha A^0$ (une extension qui ne coûte rien)

- puis $\frac{dp_\alpha}{d\tau} = q (\partial_\alpha A^\beta) U_\beta$, avec, par définition, U_β 4-vecteur

et $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_i = 0 \end{cases}$ dans ce repère où la particule a une vitesse nulle.

$\Rightarrow U_\beta$ est la 4-vitesse de la particule.

⇒ candidature de

$$\frac{dp_x}{dz} \stackrel{?}{=} q \partial_x A_\beta U^\beta$$

comme équation du mouvement relativiste d'une particule dans cette interaction.

Mais cette candidature implique:

$$p^\alpha \frac{dp_\alpha}{dz} = q m \partial_x A_\beta U^\alpha U^\beta$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} p_m^2 =$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} m^2 =$$

et donc $0 = q m \partial_x A_\beta U^\alpha U^\beta$ qui est faux!

(même si c'était le cas pour une particule;

autre particule ⇒ autre vitesse } ⇒ ça n'est plus vrai)
même champ $\partial_x A_\beta$

⇒ candidature rejetée.

Remède simple:

$$\frac{dp_x}{dz} \stackrel{?}{=} q (\partial_x A_\beta - \partial_\beta A_x) U^\beta$$

- c'est tout aussi tensoriel

- ça ne change rien à la limite classique

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{r}) \text{ statique, } \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{A} = 0, A_0(\vec{r}) \\ v \ll 1 \Rightarrow \frac{dp_i}{dz} \sim q (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) = q \partial_i A_0 \end{array} \right.$$

- et ça guérit:

$$p^\alpha \frac{dp_\alpha}{dz} = q m \underbrace{(\partial_x A_\beta - \partial_\beta A_x)}_{\text{antisym.}} \underbrace{U^\alpha U^\beta}_{\text{sym.}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} m^2 = 0$$

c'est gagné!

en posant

Théorie viable:

$$F_{\alpha\beta} \triangleq \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

alors

$$\frac{dp_x}{dz} = q F_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta$$

Là, $F_{\alpha\beta}$ semble jouer un rôle plus physique (par son effet direct sur le mouvement de la particule) que A_α ou même $\partial_\alpha A_\beta$.

\Rightarrow juste pour voir, essayer de trouver une équation (du mouvement) pour

$$j^\alpha \longrightarrow F_{\alpha\beta}$$

On avait

$$\partial_\rho \partial^\rho A^\alpha = j^\alpha$$

Qu'arrive-t-il si on essaye tout bonnement de la remplacer par :

$$\partial_\rho (\partial^\rho A^\alpha - \partial^\alpha A^\rho) \stackrel{?}{=} j^\alpha \quad (\text{Remarque: cette équation implique } \partial_\alpha j^\alpha = 0)$$

- tj: tensorielle;

- limite statique?

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{r}) \\ \vec{j} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \phi = A^0(\vec{r}) \\ \vec{A} = 0 \end{array} \right.$$

\Rightarrow pour l'équation $\alpha = 0$:

$$\partial_\rho (\partial^\rho A^0 - \partial^0 A^\rho) = j^0$$

$$\partial_\rho \partial^\rho \phi - \partial_0 \partial^0 \phi = \rho$$

$$\partial_i \partial^i \phi = \rho \quad \text{pil poil la théorie de Coulomb!}$$

Conclusion: on a une belle théorie

- forme-invariante / T. L.

- qui restitue la théorie de Coulomb

$$\partial_\rho F^{\rho\alpha} = j^\alpha$$

$$\frac{d\rho^\alpha}{dt} = q F^{\alpha\beta} U_\beta$$

avec $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, antisymétrique

- et qui exhibe ainsi son invariance de jauge, c'à d. / $A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \chi$

Mais:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = \partial_\alpha \partial_\beta A_\gamma - \partial_\alpha \partial_\gamma A_\beta$$

$$\partial_\beta F_{\gamma\alpha} = \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha - \partial_\beta \partial_\alpha A_\gamma$$

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \partial_\alpha A_\beta - \partial_\gamma \partial_\beta A_\alpha$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

\Rightarrow on peut enfin écrire la même théorie en éliminant toute référence au potentiel :

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = j^\alpha$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = q F^{\alpha\beta} U_\beta$$

et même, en posant $*F^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$,

$$\begin{array}{l} \partial_\mu F^{\mu\alpha} = j^\alpha \\ \partial_\mu *F^{\mu\alpha} = 0 \\ \frac{dp^\alpha}{d\tau} = q F^{\alpha\beta} U_\beta \end{array}$$

qui exhibe, en plus, la symétrie d'échelle de la théorie.

Conclusions :

- la théorie d'interaction à distance la + simple que l'on puisse imaginer est l'électrostatique de Coulomb ou la gravitation de Newton.
- si, en plus, on veut qu'elle soit invariante de Lorentz, cette théorie d'interaction à distance la plus simple est l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz.

Étonnant, non ?

Mais enfin, pourquoi la gravitation de Newton ne se généralise-t-elle pas (relativistiquement) sous une forme analogue à Maxwell-Lorentz ?

C'est que sa source ρ est la masse, pas la charge, et que, dans le domaine relativiste, la masse, contrairement à la charge, n'est pas conservée !

Par ex : $e^- e^+ \rightarrow 2\gamma$
 conserve la charge totale
 pas la masse totale.

Ce implique des changements plus profonds pour passer à une théorie invariante relativiste avec sources conservées.

Idee : en relativité, la masse est une forme d'énergie et justement, c'est l'énergie qui est conservée.

⇒ prendre comme source la densité d'énergie ?

énergie $\xrightarrow{v \ll c}$ masse donc cette théorie redonne bien celle de Newton à la limite

mais l'énergie n'est pas un scalaire...

Ça change tout :

- Electrodynamique, source $\rho = \frac{q}{V}$ $\xrightarrow{\text{scalaire}}$ composante d'un 4-vecteur (j^μ)
- Gravitation, source $\rho = \frac{E}{V}$ $\xrightarrow{\text{composante d'un 4-vecteur (p}^\mu)}$ composante d'un tenseur (énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$)

L'électrodynamique est une théorie à source 4-vectorielle, la gravitation tensorielle,

(toutes deux ayant la même limite classique)

⇒ structures très différentes.

De plus, la source de la gravitation

est l'énergie-impulsion, ou, plus exactement toute l'énergie impulsion (seule conservée),

c'est-à-d. l'énergie impulsion de la matière

+ " " du rayonnement électromagnétique
+ " " du champ de gravitation lui-même!

⇒ la gravitation est source de gravitation,
théorie non-linéaire (pas de superposition),

contrairement à l'électrodynamique :

le champ électromagnétique n'est pas source de champ électromagn. (seulement la charge)

théorie linéaire (solutions superposables).



Paris 7
PH456
2003-04

THEORIE CLASSIQUE DES CHAMPS

Relativité (dite restreinte), électrodynamique

Florilège

(les [n'ont pas été administrés par voie orale)

Tour de champs

Quelques généralités
Et pourquoi des champs quantiques ?

TDC
1
4

Histoire (carrangée)

Comportement de l'équation d'onde
Equation d'onde et transformation de Lorentz
Retour sur l'histoire
Einstein (1905)
Glose

H
3
8
9
9
11

Transformations de Lorentz, le patriarcat

Transformations spéciales de Lorentz en configuration standard
La constante fondamentale c
Invariant
Signification du paramètre ?
Inverse
Composition des vitesses
Composition des vitesses parallèles
Ecriture vectorielle, Transformations Spéciales de Lorentz
Causalité
Vocabulaire
Groupe ou pas ?
Rapidité

TLP
1
3
6
8
11
11
13
14
17
18
21
22

Les transformations de Lorentz (presque) inevitables

Principe de relativité
Theories de relativité
Principe d'équivalence par translations
Nombre de paramètres
Homogénéité de l'espace-temps
A la manière de Noether
Equivalence par rotations spatiales
Composition de deux transformations
Principe de causalité
Bilan
En (3+1) dimensions

TLI
1
2
2
3
4
5
5
7
12
14
14

Transformations de Lorentz, formalisme tensoriel 1

Quelques définitions
Une propriété caractéristique
Classification des transformations de Lorentz homogènes
Qu'y a-t-il dans $\mathbb{R}^{3,1}$?
Quadrivecteurs

TLFT
1
4
6
8
11

Cinématique relativiste

Ligne d'univers d'un point matériel
Vitesse
Temps propre
Quadrivecteurs cinématiques
Graffiti
Quelques utilisations
Un invariant
Vitesse relative

CR
1
1
3
5
10
11
11
11

Dynamique relativiste

Lois de conservation
Unicité de p
Masse et énergie
Les transformations de Lorentz faciles
Remarquables identités
Masse nulle
La masse n'est pas conservée
La masse n'a pas de centre
La masse invariante
Epilogue

DR
3
7
11
13
15
15
17
22
24
27

Formalisme tensoriel, le retour

- Encore des définitions
- Composantes covariantes
- Illustration
- (Quadri-)Tenseurs
- Pourquoi des tenseurs?
- Conclusion
- Et la théorie des groupes dans tout ça?
- Comment faire des tenseurs?
- Produit direct
- Combinaison linéaire
- Contraction
- Tenseur métrique de Minkowski
- Tenseur de Levi-Civita
- Tenseurs nuls
- Dérivée covariante

FTLR

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18

Électrodynamique, le patrimoine culturel

- La théorie
- Structure
- Les constantes
- Superposition
- Invariances
- Par rotation
- Par réflexion
- Par renversement du temps
- Par transformation de Lorentz
- Par transformation de Galilée
- Par conjugaison de charge
- Par dualité
- Construction de la charge
- Équations de Maxwell dans la matière
- Les potentiels
- Invariance de jauge
- Unités
- Charges ponctuelles, charges distribuées
- Tactique autrichienne
- La charge ponctuelle
- Énergie et impulsion du champ électromagnétique

EPC

- 1
- 2
- 3
- 3
- 3
- 4
- 4
- 4
- 5
- 5
- 5
- 5
- 7
- 9
- 13
- 16
- 18
- 18
- 20

Électrodynamique, formulation tensorielle

- Invariance de l'équation de continuité
- Version high-tech
- Remarque
- Les équations des potentiels
- Tenseur du champ électromagnétique
- Équations de Maxwell
- Équation de Lorentz
- Récapitulation
- Transformations de Lorentz du champ électromagnétique
- Invariants du champ

EFT

- 1
- 3
- 3
- 3
- 4
- 6
- 8
- 10
- 12
- 16

Solution des équations de Maxwell

- Intuitivement
- Solutions de l'équation d'onde inhomogène
- Potentiels de Lorenz

SEM

- 1
- 3
- 9

Champ créé par une charge ponctuelle en mouvement quelconque

- Potentiels de Lienard et Wiechart
- Une idée beaucoup trop simple
- Une idée encore trop simple
- Une bonne idée
- Calcul astucieux
- Calcul orthodoxe
- Champs électrique et magnétique
- Calcul orthodoxe
- Calcul tensoriel
- Pour celles qui aiment Feynman
- Décomposition
- Le champ de convection
- Charge à vitesse constante

CECP

- 1
- 1
- 2
- 3
- 6
- 8
- 9
- 15
- 18
- 18
- 19
- 22

Énergie-impulsion du champ électromagnétique

- Un théorème
- Technologie: l'intégration invariante
- Encore un théorème: Gauss en (3+1)
- Cas du champ libre
- Champ pas libre
- Élése
- Cas du champ libre
- Cas d'une source stationnaire
- Cas d'une charge ponctuelle à vitesse constante
- Cas d'une charge ponctuelle accélérée

EI

- 1
- 4
- 6
- 8
- 11
- 15
- 15
- 15
- 16
- 16

Rayonnement d'une charge ponctuelle

- Techniciens
- Physiciennes fundamentalistes
- Rayonnement d'une charge à basse vitesse
- Encore l'impulsion
- Distribution angulaire de puissance rayonnée
- Généralités qualitatives
- Récapitulation: les formules pas inutiles
- Généralités quantitatives
- Accélération longitudinale
- Accélération transversale
- Choix des machines
- Distribution angulaire de puissance rayonnée
- Rayonnement synchrotron

RCP

1
2
3
6
13
17
19
21
22
26
28
28
30

Formulation variationnelle

- L'électrodynamique, récapitulation
- Historique et statut
- En physique non quantique
- En théorie quantique
- Emmy Noether
- Une propriété amusante
- Généralisation
- Mécanique
- Théorie des champs

FY

1
3
4
5
5
9
9
11
18

Théorie de jauge de l'interaction électromagnétique (presque)

- Invariance de jauge locale, dérivée covariante
- Principe d'invariance de jauge locale U(1)
- Existence de l'interaction, couplage minimal
- Particule de spin 1/2
- Hamiltonien de Pauli

TJ

2
5
6
9
11

L'électrodynamique, une récréation

ER