ER 1

L'ÉLECTRODYNAMIQUE, UNE RECRÉATION

(exercice d'heuristique fiction)

$\simeq 1700$: théorisation d'une interaction à distance, c'est courageux (rien qui ressemble plus à de la magie)

source $\longrightarrow$ effet sur une particule

$\underbrace{\text{effet}}_{?}$

source caractérisée au plus simple par une fonction à valeur numérique $\rho(\vec{r})$ (non nulle dans une certaine région)

Chocs / interactions locales

$\Rightarrow$ conservation de $\sum m\vec{v}$

particule libre $\hat{=}$ $m\vec{v}$ cte

particule pas libre, $\hat{=}$ $m\vec{v}$ variable ou en interaction

$\Rightarrow$ effet = variation de $m\vec{v}$

Donc chercher une théorie pour $\frac{d}{dt} m\vec{v}$ de la particule.

- c'est un vecteur (on croit à l'invariance par rotation)
- on essaye ce qu'il y a de plus simple et universel

$$\frac{d}{dt} m\vec{v} = g\,\vec{E}(\vec{r})$$

(Effet en $\vec{r}$, caractéristique de la source)

(constante de couplage, caractéristique de la particule / interaction)

Ainsi, pour 2 particules placées dans les mêmes conditions :

$$\frac{d}{dt} m_1\vec{v}_1 \propto \frac{d}{dt} m_2\vec{v}_2$$

Reste à trouver une théorie pour $\rho(\vec{r}) \longrightarrow \vec{E}(\vec{r})\dots$

$\vec{E}(\vec{r}) \propto \rho(\vec{r})$?

$\rho(\vec{r}) \neq 0$

× $\vec{E}(\vec{r}) \propto \rho(\vec{r}) = 0$
pas d'effet,
pas d'interaction à distance (hors source)

$\partial\vec{E}(\vec{r}) \propto \rho(\vec{r})$?

dérivée spatiale

$\rho(\vec{r}) \neq 0$

× $\partial\vec{E} \propto \rho(\vec{r}) = 0$
mais possibilité $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$

ER 2

ρ le + simple : scalaire
$\downarrow$
$\underline{E}$ → vecteur pour invariance

? ⟹ + simple :

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho(\vec{r})}$$

Principe (de simplicité) : on veut croire (jusqu'à preuve du contraire) à la conservation de l'énergie méca. dans les interactions fondamentales (pas de dissipation, de chaleur, manifestations non élémentaires).

⟹ travail (circulation) indépendant du chemin, force conservative,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

D'où la théorie :

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\phi &= -\rho \\ \frac{d}{dt} m\vec{v} &= -q\,\vec{\nabla}\phi\end{aligned}}$$

Est-elle réalisée ?
Oui, et même plutôt deux fois qu'une,
pour { des sources statiques,
{ particules à basse vitesse.

1) Coulomb ($\simeq$ 1800)

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\phi &= -\frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \\ \frac{d}{dt} m_i\vec{v} &= -q_e\,\vec{\nabla}\phi\end{aligned}}$$

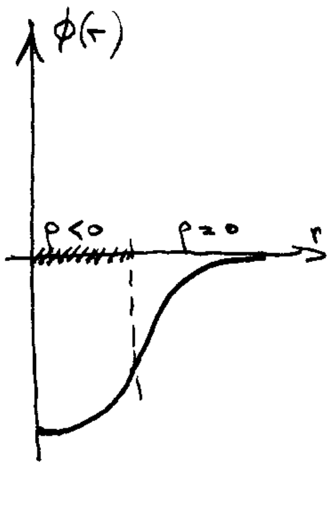
source

inerte

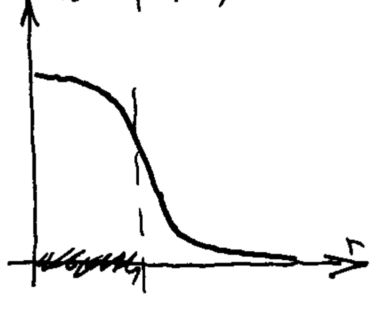
charge de la particule d'épreuve

avec ε_0 pour :
– dimension $[\rho] = [q]\,\mathcal{L}^{-3}$
– unité de q et ρ

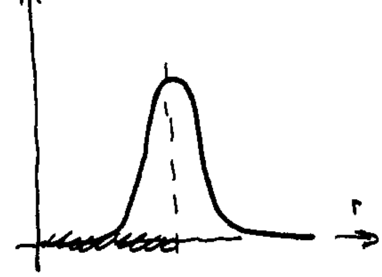
Existe en deux versions, attractive / répulsive
⟹ ρ, q >0 ou <0
Par ex : $\rho \leq 0$, $q<0$



$V_{es} = q\,\phi(r)$



$\vec{F}_{es} = -\vec{\nabla}\, V_{es}$



positive
donc répulsive

2) Newton ($\simeq$ 1700)
N'existe qu'en version attractive,
on l'écrit plutôt
$$\begin{cases} \Delta\phi = \rho \\ \frac{d}{dt} m\vec{v} = -g\,\vec{\nabla}\phi \end{cases}$$

avec $\rho, g \geq 0$.
Propriété empirique : $\frac{m}{g}$ = constante universelle quelle que soit la particule, à 10^{-11} près !

$\Longrightarrow$ on choisit :
- la dimension de ϕ en sorte que $[m] = [g]$;
- d'introduire une constante devant ρ, en sorte que $[\rho] = [m]\,\mathcal{L}^{-3}$.

Soit
$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\phi &= 4\pi\, G\, \rho_s \\ \frac{d}{dt} m_i\vec{v} &= -m_e\,\vec{\nabla}\phi \end{aligned}}$$

avec $m_i \simeq m_e$ (masse d'épreuve)
et $\simeq m_s$ lorsque la même particule joue le rôle de source.
Étonnant de trouver 2 fois la même théorie réalisée dans des ordres de grandeurs <u>très</u> différents (10^{-42}).

$\simeq$ 1900
Théorie de la relativité,
dont on sait même maintenant qu'elle était à peu près inévitable pour cause de principes

$$\left.\begin{array}{l} \text{de relativité} \\ \text{d'homogénéité de l'espace-temps} \\ \text{d'isotropie de l'espace} \\ \text{de causalité} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{invariance de Lorentz}$$

Une théorie relativisée de l'interaction à distance doit :
- avoir une forme invariante / transf. de Lorentz
- restituer la théorie classique primordiale lorsque la particule a une basse vitesse (et que la source est statique).

Pas de processus déductif. Théorie pas unique a priori.
On cherche la plus simple...

... en commençant par la théorie de Coulomb.

Invariance / Lorentz $\Longrightarrow$ utiliser $\begin{cases} \text{unités } \varepsilon_0 = c = 1 \\ \text{ingrédients tensoriels} \end{cases}$

$$\Delta \phi = -\rho$$
$$\partial_i \partial_i \phi = -\rho$$
$$-\partial_i \partial^i \phi = -\rho$$
$$\partial_i \partial^i \phi = \rho$$

Essayer : $\partial_\mu \partial^\mu \phi \overset{?}{=} \rho$

$\Rightarrow$ le temps entre en scène.

Alors, principe (de simplicité, anti-magique) de conservation locale des sources (cf Feyman, <u>la Nature de la physique</u>) :

$\rho(\vec{r},t) \Longrightarrow \exists\, \vec{j}(\vec{r},t)$ t.q. $\quad \partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

$$\partial_0 \rho + \partial_i j^i = 0$$

comp$^{\text{tes}}$ de 4-vecteur

$\Rightarrow$ l'invariance de forme de l'équation de conservation est assurée si $(\rho, \vec{j})$ comp$^{\text{tes}}$ de 4-vecteur

Alors $\quad \partial_\alpha j^\alpha = 0$

avec $\rho = j^0$ compo$^{\text{te}}$ 0 d'un 4-vecteur $\underset{\sim}{j}$

$$\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{\text{scalaire}} \phi = \rho$$

$\Rightarrow \phi$ composante 0 d'un 4-vecteur $\underset{\sim}{A}$.

Tensoriel $\Rightarrow$ les 4 composantes jouent nécessairement le même rôle :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = j^\alpha$$

(Remarquer : $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ exige $\partial_\mu \partial^\mu \partial_\alpha A^\alpha = 0$)

Et pour l'équation du mouvement d'une particule d'épreuve (l'autre moitié de la théorie) ? Exigences :

- une forme invariante / transf. de Lorentz
- restituer $\frac{d}{dt} m\vec{v} = -q\vec{\nabla}\phi$ si charge à basse vitesse

Commode (quoique pas nécessaire, voir l'Histoire) d'utiliser des ingrédients tensoriels. Lesquels ?

Chocs, ou interactions localisées $\Longrightarrow$
conservation de $\sum p_\mu$ (avec $p^i_\mu \stackrel{\wedge}{=} m_i \frac{dx^i_\mu}{d\tau_i}$)

$\Longrightarrow$ particule libre $p_\mu = cte$
particule pas libre $\frac{dp_\mu}{d\tau} \neq 0$
et en plus : $\frac{d\vec{p}}{d\tau} \underset{v\ll 1}{\sim} \frac{d}{dt} m\vec{v}$ super !

Dans un repère (inertiel) où la particule a une vitesse nulle (en un événement choisi) :

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} \sim \frac{d}{dt} m\vec{v} = -q\vec{\nabla}\phi$$

$$\underbrace{\frac{dp_i}{d\tau}}_{\text{compte de 4-vect.}} = q\,\partial_i A^0$$

$\Longrightarrow$ si on l'écrit comme compte de 4 vecteur, c'est gagné pour tous repères !

Facile :

- d'abord $\frac{dp_\alpha}{d\tau} = q\,\partial_\alpha A^0$ (une extension qui ne coûte rien)
- puis $\frac{dp_\alpha}{d\tau} = q(\partial_\alpha A^\beta)U_\beta$, avec, par définition, U_β 4-vecteur et $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_i = 0 \end{cases}$ dans ce repère où la particule a une vitesse nulle.

$\Longrightarrow U_\beta$ est la 4-vitesse de la particule.

$\Rightarrow$ candidature de

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} \overset{?}{=} q\, \partial_\alpha A_\beta\, U^\beta$$ comme équation du mouvement relativiste d'une particule dans cette interaction.

Mais cette candidature implique :

$$p^\alpha \frac{dp_\alpha}{d\tau} = q m\, \partial_\alpha A_\beta\, U^\alpha U^\beta$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\, p_n^2 =$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\, m^2 =$$

et donc $\quad 0 = q m\, \partial_\alpha A_\beta\, U^\alpha U^\beta \quad$ qui est faux !

(même si c'était le cas pour une particule ;
autre particule $\Rightarrow$ autre vitesse
même champ $\partial_\alpha A_\beta$ $\Big\} \Rightarrow$ ça n'est plus vrai)

$\Rightarrow$ candidature rejetée.

Remède simple :

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} \overset{?}{=} q\,(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\, U^\beta$$

- c'est tout aussi tensoriel
- ça ne change rien à la limite classique

$$\begin{cases} \rho(\vec r)\ \text{statique}, \quad \vec J = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec A = 0,\ A_0(\vec r) \\ v \ll 1 \Rightarrow \quad \dfrac{dp_i}{d\tau} \sim q(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) = q\, \partial_i A_0 \end{cases}$$

- et ça guérit :

$$p^\alpha \frac{dp_\alpha}{d\tau} = q m \underbrace{(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}_{\text{antisym.}} \underbrace{U^\alpha U^\beta}_{\text{sym.}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} m^2 = 0$$

C'est gagné !

Théorie viable :

en posant $\boxed{F_{\alpha\beta} \triangleq \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha}$

alors $\boxed{\dfrac{dp_\alpha}{d\tau} = q\, F_{\alpha\beta}\, U^\beta}$

Là, $F_{\alpha\beta}$ semble jouer un rôle plus physique (par son effet direct sur le mouvement de la particule) que A_α ou même $\partial_\alpha A_\beta$.

$\Rightarrow$ juste pour voir, essayer de trouver une équation (du mouvement) pour

$$j^\alpha \longrightarrow F_{\alpha\beta} .$$

On avait

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = j^\alpha$$

¿ Qu'arrive-t-il si on essaye tout bonnement de la remplacer par :

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\alpha - \partial^\alpha A^\mu) \overset{?}{=} j^\alpha$$

(Remarquer : cette équation implique $\partial_\alpha j^\alpha = 0$)

- t.j. tensorielle ;
- limite statique ? $\left\{ \begin{matrix} \rho(\vec{r}) \\ \vec{j} = 0 \end{matrix} \right.$ $\left\{ \begin{matrix} \phi = A^0(\vec{r}) \\ \vec{A} = 0 \end{matrix} \right.$

$\Rightarrow$ pour l'équation $\alpha = 0$:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) = j^0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - \partial_0 \partial^0 \phi = \rho$$

$$\partial_i \partial^i \phi = \rho$$ pil poil la théorie de Coulomb !

Conclusion : on a une belle théorie
- forme-invariante / T. L.
- qui restitue la théorie de Coulomb

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = j^\alpha$$

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = q\, F^{\alpha\beta} U_\beta$$

avec $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, antisymétrique

- et qui exhibe ainsi son invariance de jauge, c'à d. / $A_\alpha \longrightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \chi$

Mais :

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = \partial_\alpha \partial_\beta A_\gamma - \partial_\alpha \partial_\gamma A_\beta$$

$$\partial_\beta F_{\gamma\alpha} = \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha - \partial_\beta \partial_\alpha A_\gamma$$

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \partial_\alpha A_\beta - \partial_\gamma \partial_\beta A_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

⟹ on peut enfin écrire la même théorie en éliminant toute référence au potentiel :

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = j^\alpha$$
$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$
$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = q\, F^{\alpha\beta} U_\beta$$

et même, en posant $^*F^{\alpha\beta} \hat{=} \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$,

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\alpha} &= j^\alpha \\ \partial_\mu {}^*F^{\mu\alpha} &= 0 \\ \frac{dp^\alpha}{d\tau} &= q\, F^{\alpha\beta} U_\beta \end{aligned}}$$

qui exhibe, en plus, la symétrie duale de la théorie.

Conclusions :

- la théorie d'interaction à distance la + simple que l'on puisse imaginer est l'électrostatique de Coulomb ou la gravitation de Newton.
- si, en plus, on veut qu'elle soit invariante de Lorentz, cette théorie d'interaction à distance la plus simple est l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz.

Étonnant, non ?

Mais enfin, pourquoi la gravitation de Newton ne se généralise-t-elle pas (relativistiquement) sous une forme analogue à Maxwell-Lorent ?

C'est que sa source ρ est la masse, pas la charge, et que, dans le domaine relativiste, la masse, contrairement à la charge, n'est pas conservée !

Par ex : $e^- \; e^+ \longrightarrow 2\gamma$

conserve la charge totale
pas la masse totale.

Ca implique des changements plus profonds pour passer à une théorie invariante relativiste avec sources conservées.

Idée : en relativité, la masse est une forme d'énergie et justement, c'est l'énergie qui est conservée.

$\Rightarrow$ prendre comme source la densité d'énergie ?

énergie $\xrightarrow[v \ll 1]{}$ masse   donc cette théorie redonne bien celle de Newton à la limite

mais l'énergie n'est pas un scalaire ...

Ça change tout :

- Electrodynamique, source $\rho = \frac{q}{V}$ $\longrightarrow$ composante d'un 4-vecteur (j^μ)
  scalaire
- Gravitation, source $\rho = \frac{E}{V}$ ← composante d'un 4-vecteur (p^μ)
  → composante d'un tenseur (énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$)

L'électrodynamique est une théorie à source 4-vectorielle,
la gravitation ———————— tensorielle,
(toutes deux ayant la même limite classique)

$\Rightarrow$ <u>structures très différentes</u>.

De plus, la source de la gravitation est l'énergie-impulsion,
ou, plus exactement <u>toute</u> l'énergie impulsion (seule conservée),
c-à-d. l'énergie impulsion de la matière
+ " " du rayonnement électromagnétique
+ " " du champ de gravitation lui même !

$\Rightarrow$ la <u>gravitation est source de gravitation</u>,
<u>théorie non-linéaire</u> (pas de superposition),

contrairement à l'électrodynamique :
le champ électromagnétique n'est pas source de champ él.magn.
(seulement la charge)
théorie linéaire (solutions superposables).

Paris 7
PH456
2003 - 04

THÉORIE CLASSIQUE DES CHAMPS

Relativité (dite restreinte), électrodynamique

Florilège

(les [n'ont pas été administrés par voie orale)