

THÉORIE CLASSIQUE DES CHAMPS

vendredi 10 septembre 2004, 9 h–13 h

EXAMEN

Les exercices I à V proposés commencent chacun par des questions simples, élémentaires donc fondamentales, suffisantes pour vous garantir la moyenne, et se terminent généralement par des questions plus ouvertes. Le petit problème VI exige juste un peu de sagacité. Le tout ne comporte aucun piège délibéré. Lorsqu'il vous est demandé de "déduire" un résultat, il vous faut présenter un raisonnement ou, plus souvent, un calcul convaincant (et non le simple produit d'une mémoire, naturelle ou artificielle), abrégé le cas échéant au moyen des astuces auxquelles vous pouvez songer. Il vous est rappelé de toujours vérifier la vraisemblance de vos résultats, à commencer par leur homogénéité.

I. MOUVEMENT HYPERBOLIQUE

1. Représentez l'allure de la ligne d'univers d'un point mobile en mouvement dit "hyperbolique".
2. Donnez l'expression de l'équation de cette ligne d'univers.
3. *i)* En déduire l'expression de la vitesse du mobile en fonction du temps.
ii) Déterminez l'expression de la vitesse du mobile en fonction de la distance parcourue depuis l'événement où il avait une vitesse nulle.
4. Déterminez l'expression du temps propre du mobile en fonction du temps.
5. En déduire :
i) l'équation paramétrique de la ligne d'univers en fonction du temps propre ;
ii) les expressions des composantes de la quadri-vitesse en fonction du temps propre ;
iii) les expressions des composantes de la quadri-accélération en fonction du temps propre.
6. Calculez le carré de la quadri-accélération. Conclusion ?

II. ÉNERGIE ET IMPULSION

1. Rappelez la définition de la quadri-impulsion d'une particule de masse m , temps propre τ , ligne d'univers $x(\tau)$.
2. En déduire les expressions de l'énergie et de l'impulsion de la particule de masse m , vitesse \mathbf{v} .
3. En déduire les diverses identités remarquables satisfaites par la quadri-impulsion, l'énergie, l'impulsion de la particule de masse m , vitesse \mathbf{v} .
4. On considère la diffusion élastique proton-proton vue du laboratoire : proton cible immobile, énergie cinétique du proton incident 437 MeV, masse du proton 938 MeV. On s'intéresse au cas où les deux protons de l'état final ont la même énergie. Considérant la conservation de la quadri-impulsion totale, et donc de son carré, calculez l'angle formé par les directions de propagation des protons de l'état final. Et dans le cas d'un proton incident de 1 TeV (produit par le TEVATRON du Fermilab) ?
5. On considère la collision inélastique, $m + m \rightarrow m'$, d'une particule de masse m , vitesse $4/5$, sur une particule de masse m , immobile. Calculez la masse m' de la particule finale, ainsi que sa vitesse.

III. TRANSFORMATION DE LORENTZ DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

1. Rappelez la définition du tenseur du champ électromagnétique.
2. *i)* En déduire les expressions de chacune des composantes deux fois covariantes de ce tenseur, en termes des composantes des champs électrique et magnétique.
ii) En déduire les expressions des composantes deux fois contravariantes du même tenseur.
3. *i)* En déduire les lois de transformation des composantes des champs électrique et magnétique lors d'une transformation spéciale de Lorentz en configuration standard.
ii) En déduire une écriture vectorielle des lois de transformation des champs électrique et magnétique lors d'une transformation spéciale de Lorentz.
iii) Citez un ou plusieurs procédés de vérification de la vraisemblance des résultats de vos calculs.
4. Les champs électrique et magnétique en un événement sont orthogonaux. Sur un système d'axes idoïne, ils ont pour composantes :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E/n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } n > 1.$$

Calculez les composantes des champs en cet événement dans un repère qui se déplace à la vitesse $\boldsymbol{\beta} = (1/n)\hat{\mathbf{x}}$, sur un système d'axes choisi en configuration standard.

IV. CHAMP DE CONVECTION ET CHAMP DE RAYONNEMENT

Une particule de charge positive se meut à vitesse constante $v = 1,8 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$. Suite à un choc élastique avec une particule très massive, la particule incidente est rétro-diffusée à 180° avec une vitesse de même module. Représentez, 1 ns après le choc :

- i)* l'allure de la région de l'espace où règne une contribution du type rayonnement au champ électromagnétique ;
- ii)* l'allure des lignes de champ électrique ;
- iii)* l'allure du champ magnétique.

V. RAYONNEMENT D'UNE CHARGE PONCTUELLE À BASSE VITESSE

1. Pour une charge accélérée à basse vitesse :
 - i)* rappelez l'expression du champ électrique rayonné et expliquez soigneusement la signification des divers symboles apparaissant dans votre formule ;
 - ii)* rappelez l'expression du champ magnétique rayonné correspondant ;
 - iii)* rappelez les propriétés essentielles de ces champs ;
 - iv)* déterminez l'expression du vecteur de Poynting du champ électromagnétique rayonné ;
 - v)* en déduire l'expression de l'énergie rayonnée durant dt dans l'angle solide $d^2\hat{r}$ autour d'une direction donnée ;
 - vi)* en déduire l'expression de la puissance totale rayonnée par la charge (taux de Larmor).
2. Discutez la polarisation et la puissance du champ rayonné par un dipôle électrique tournant à la vitesse angulaire ω .

VI. OBSERVATIONS RADAR

Un vaisseau spatial de longueur 600 m s'éloigne en ligne directe de la Terre à vitesse constante. Une impulsion radar émise depuis la Terre est renvoyée par des réflecteurs disposés à l'arrière et à l'avant du vaisseau. La première impulsion réfléchie est reçue par le radar 200 s après l'émission. La deuxième impulsion est reçue 17,4 μs plus tard.

1. Représentez schématiquement, sinon à l'échelle, ce scénario sur deux graphes d'espace-temps, dans le repère du radar et dans le repère du vaisseau respectivement.
2. Calculez la distance du vaisseau à la Terre.
3. Calculez la vitesse du vaisseau par rapport à la Terre.
4. Est-il possible que ce vaisseau soit parti de la Terre ?

② Hyperbole: $x^2 - t^2 = a^2$

Pour la branche représentée ($x > 0$):

$$x = \sqrt{a^2 + t^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}$$

ou $\boxed{ax = \sqrt{1 + (at)^2}}$ avec $a = \frac{1}{a}$

③ i) $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(ax)}{d(at)}$

$$\boxed{v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + (at)^2}}}$$

ii) $\Rightarrow v = \frac{at}{ax} = \frac{t}{x}$ // amusant, entraîne qq jolies propriétés

$v(x) = \text{signe}(x) \frac{\sqrt{(ax)^2 - 1}}{ax}$ sans intérêt!

④ $d\tau^2 \cong dt^2 - dx^2$

$$d\tau \cong dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = dt \sqrt{1 - \frac{(at)^2}{1 + (at)^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1 + (at)^2}}$$

$$d(a\tau) = \frac{d(at)}{\sqrt{1 + (at)^2}} = \frac{d(\text{sh } \beta)}{\sqrt{1 + \text{sh}^2 \beta}} = \frac{\text{ch } \beta d\beta}{\text{ch } \beta} = d\beta$$

$$a\tau = \int d\beta = \beta + \text{cte}$$

$$\boxed{a\tau = \text{arg sh } at} \quad (+ \text{cte})$$

⑤ i) $\boxed{at = \text{sh } a\tau}$

$$ax = \sqrt{1 + \text{sh}^2 a\tau}$$

$$\boxed{ax = \text{ch } a\tau} \quad \boxed{y = z = 0}$$

ii) $U^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{d(at)}{d(a\tau)}$, $U^x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{d(ax)}{d(a\tau)}$

$$\boxed{\begin{aligned} U^t &= \text{ch } a\tau \\ U^x &= \text{sh } a\tau \\ U^y &= U^z = 0 \end{aligned}}$$

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} A^t &= a \text{sh } a\tau \\ A^x &= a \text{ch } a\tau \\ A^y &= A^z = 0 \end{aligned}}$$

⑥ $A^2 = (A^t)^2 - (A^x)^2 - (A^y)^2 - (A^z)^2 = \alpha^2 \text{sh}^2 \alpha z - \alpha^2 \text{ch}^2 \alpha z$
 $= -\alpha^2$

En général, dans un repère comobile :

$(A^{\mu k}) = \begin{cases} 0 \\ \text{acc. propre} \end{cases} \Rightarrow A^2 = -(\overrightarrow{\text{acc. pr}})^2$

Donc, ici, $|\overrightarrow{\text{acc. pr}}| = \alpha = \text{cte}$

Le mouvement hyperbolique est un mouvement rectiligne à accélération propre constante.

II. Énergie et impulsion

① $x(z) \rightarrow U(z) \triangleq \frac{dx}{dz}$, $p_m \triangleq m U_m$

② $\begin{cases} p^t = m U^t = m \frac{dt}{dz} = m \frac{dt}{\sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \\ \vec{p} = m \vec{U} = m \frac{d\vec{x}}{dz} = m \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{dz} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases}$

énergie :

$E = p^t = \gamma(v) m$

impulsion :

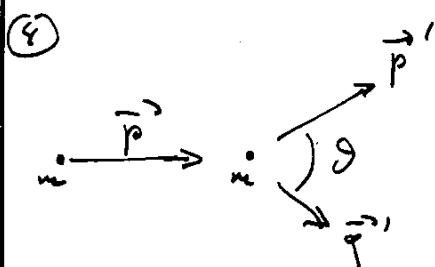
$\vec{p} = \gamma(v) m \vec{v}$

avec $\gamma(v) \triangleq (1-v^2)^{-1/2}$

③ $p_m^2 = m^2 U_m^2 \Rightarrow \boxed{p_m^2 = m^2}$
↑
= 1

$\Rightarrow (p^t)^2 - \vec{p}^2 = m^2 \Rightarrow \boxed{E^2 = p^2 + m^2}$

$\begin{cases} E = \gamma m \\ \vec{p} = \gamma m \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}}$



$p + q = p' + q'$
 $p^2 + 2p \cdot q + q^2 = p'^2 + 2p' \cdot q' + q'^2$
↑
 m^2 ↑ ↑ ↑

$\Rightarrow p \cdot q = p' \cdot q'$

$$\text{avec } \underline{p} = \begin{Bmatrix} E_p \\ \underline{p} \end{Bmatrix}, \quad \underline{q} = \begin{Bmatrix} m \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{p}' = \begin{Bmatrix} E_{p'} \\ \underline{p}' \end{Bmatrix}, \quad \underline{q}' = \begin{Bmatrix} E_{q'} \\ \underline{q}' \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow E_p m = E_{p'} E_{q'} - p' q' \cos \mathcal{D}$$

$$\text{Cas } E_{p'} = E_{q'} \Rightarrow q' = p' \quad \text{et } E_{p'} = E_{q'} = \frac{E_p + m}{2}$$

$$p'^2 = E_{p'}^2 - m^2$$

$$\Rightarrow \cos \mathcal{D} = \frac{E_{p'}^2 - E_p m}{p'^2} = \frac{\left(\frac{E_p + m}{2}\right)^2 - E_p m}{\left(\frac{E_p + m}{2}\right)^2 - m^2}$$

$$= \frac{(E_p + m)^2 - 4 E_p m}{(E_p + m)^2 - 4 m^2} = \frac{(E_p - m)^2}{(E_{\text{cin}} + 2m)^2 - 4m^2}$$

avec $E_p = E_{\text{cin}} + m$

$$\Rightarrow \cos \mathcal{D} = \frac{E_{\text{cin}}^2}{E_{\text{cin}}^2 + 4m E_{\text{cin}}}$$

$$\boxed{\cos \mathcal{D} = \frac{1}{1 + 4 \frac{m}{E_{\text{cin}}}}} = \frac{1}{1 + 4 \cdot \frac{0,938}{437}} \approx 0,104$$

$$\boxed{\mathcal{D} \approx 84^\circ}$$

$$\cos \mathcal{D} \approx 1 - 4 \frac{m}{E_{\text{cin}}}$$

$E_{\text{cin}} \gg m$

$$1 - \frac{\mathcal{D}^2}{2} \approx 1 - 4 \frac{m}{E_p}$$

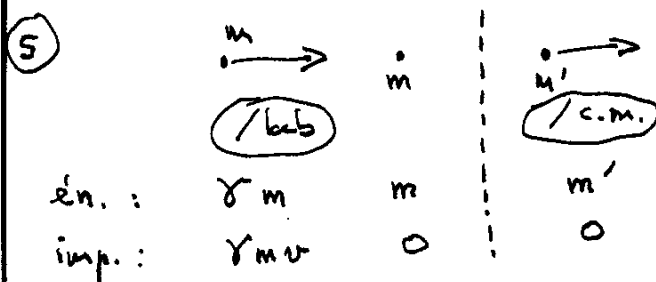
$$\mathcal{D} \sim \sqrt{\frac{8 \cdot m}{E_p}}$$

$E_p \gg m$

$$E_p = 1 \text{ TeV} = 10^3 \text{ GeV}$$

$$= \sqrt{\frac{8 \times 0,938}{10^3}} = 8,7 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\boxed{\mathcal{D} \approx 5^\circ}$$



Masse invariante:

$$(\gamma m c + m c)^2 - (\gamma m v)^2 = m'^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{m'}{m}\right)^2 &= (\gamma+1)^2 - \gamma^2 v^2 \\ &= \gamma^2(1-v^2) + 2\gamma + 1 \\ &= 2 + 2\gamma \end{aligned}$$

$$\boxed{m' = m \sqrt{2(1+\gamma)}}$$

$$v = \frac{4}{5}, \quad 1-v^2 = \frac{9}{25}$$

$$\gamma = \frac{5}{3}$$

$$2(1+\gamma) = \frac{16}{3}$$

$$\boxed{m' = m \frac{4}{\sqrt{3}}} \simeq 2,31 m$$

Conservation de l'énergie, dans le labo:

$$\gamma m + m = \gamma' m'$$

$$\Rightarrow \gamma' = \frac{m}{m'} (\gamma+1) = \frac{1}{\sqrt{2(\gamma+1)}} (\gamma+1)$$

$$\boxed{\gamma' = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$1-v'^2 = \frac{1}{\gamma'^2} = \frac{3}{4}$$

$$v'^2 = \frac{1}{4}, \quad \boxed{v' = \frac{1}{2}}$$

III. Transformation de Lorentz du champ é. mag.

① $\boxed{F_{\mu\nu} \hat{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$, antisymétrique

② i)
$$\begin{aligned} F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \\ &= -\partial_0 A^i - \partial_i A_0 \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} A^i - \frac{\partial}{\partial x^i} A^0, \quad \text{avec } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_{0i} = E_i$$

$$\begin{aligned} F_{12} &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \\ &= -(\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1), \quad \text{avec } \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_{12} = -B_3$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}, \text{ antisymétrique}$$

$$F^{01} = 1 \cdot (-1) \cdot F_{01} = -F_{01} = -E_1$$

$$F^{12} = (-1) \cdot (-1) \cdot F_{12} = F_{12} = -B_3$$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

③ i) Transf. de Galilée \rightarrow repère vitesse $\vec{\beta} = \beta \hat{x}$

$$x' = x - \beta t$$

\Rightarrow Transf. spéciale de Lorentz en conf. standard:

$$\begin{cases} x' = \gamma(\beta) (x - \beta t) \\ t' = \gamma(\beta) (t - \beta x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\text{soit } x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \text{ avec } (\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B'_1 = F'^{32} = \Lambda^3_{\mu} \Lambda^2_{\nu} F^{\mu\nu} = F^{32}$$

$$B'_2 = F'^{13} = \Lambda^1_{\mu} \Lambda^3_{\nu} F^{\mu\nu} = -\gamma\beta F^{03} + \gamma F^{13}$$

$$B'_3 = F'^{21} = \Lambda^2_{\mu} \Lambda^1_{\nu} F^{\mu\nu} = -\gamma\beta F^{20} + \gamma F^{21}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B'_1 = B_1 \\ B'_2 = \gamma (B_2 + \beta E_3) \\ B'_3 = \gamma (B_3 - \beta E_2) \end{cases}$$

et par transf. duale $\begin{cases} \vec{E}' \rightarrow \vec{B}' \\ \vec{B}' \rightarrow -\vec{E}' \end{cases}$

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta B_3) \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta B_2) \end{aligned}$$

ii) Comme la vitesse du repère nouveau est $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tout ça peut aussi bien s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \wedge \vec{E}) \end{aligned}$$

(valable $\forall \vec{\beta}$)

Et même :

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp} \\ &= \vec{E}_{\parallel} + \gamma \vec{E}_{\perp} + \gamma \vec{\beta} \wedge \vec{B} \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \quad (= \vec{E} - \vec{E}_{\parallel}) \\ &\quad \quad \quad (= (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \hat{\beta} = \frac{1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \vec{\beta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}' &= \gamma \vec{E} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \vec{\beta} + \gamma \vec{\beta} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' &= \gamma \vec{B} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \vec{\beta} - \gamma \vec{\beta} \wedge \vec{E} \end{aligned}$$

iii) Vérifications ?

- Calculer effectivement E'_1, E'_2, E'_3
- Les invariants: $E'^2 - B'^2 \neq E^2 - B^2$
 $\vec{E}' \cdot \vec{B}' \neq \vec{E} \cdot \vec{B}$
- La limite "non relativiste" dans le cas "magnétique"
($B \gg E$) : $\vec{E}' \approx \vec{E} + \vec{\beta} \wedge \vec{B}$

champ électromoteur des lycéennes

(4)

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E}{n} \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta = \frac{1}{n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} = 0$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E/n \end{pmatrix} \right\} = \gamma \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \beta E/n \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - \beta/n) \gamma E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E/n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \gamma \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E/n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta E \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\frac{1}{n} - \beta) \gamma E \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{1}{n} \Rightarrow \vec{E}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}' = 0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}$$

Champ purement électrique.

Vérifications :

$$\vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0 = \vec{E} \cdot \vec{B}$$

$$E'^2 - B'^2 = (1 - \frac{1}{n^2}) E^2 = E^2 - B^2$$

IV. Champ de convection, champ de rayonnement

1 ns après le choc, ray

- rayonnement sur une sphère de rayon

$$r = ct = 1 \text{ ns} = 3 \times 10^8 \times 10^{-9} = 0,3 \text{ m}$$

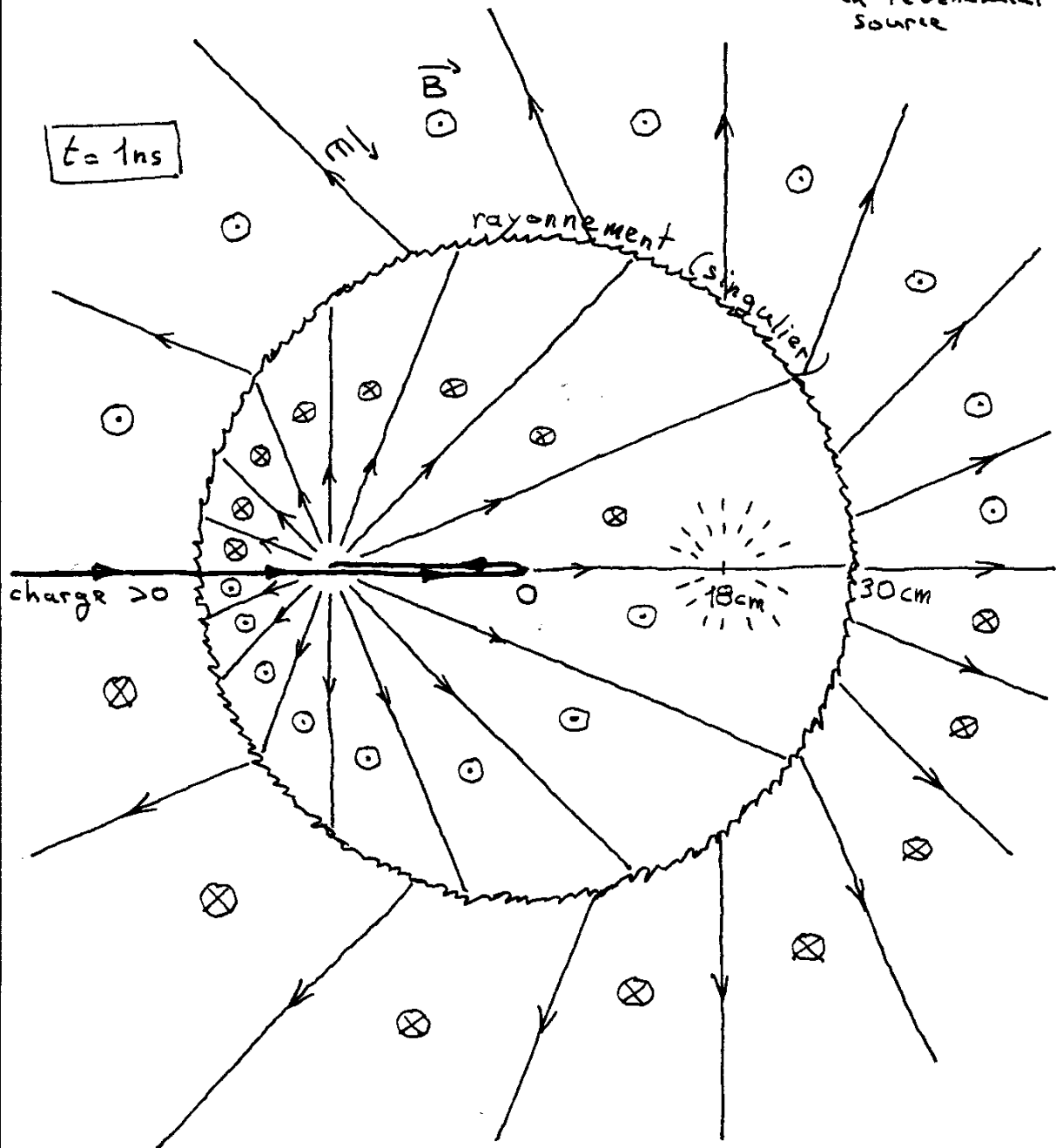
- distance parcourue par la particule

$$d = vt = 1,8 \times 10^8 \times 10^{-9} = 0,18 \text{ m}$$

(attendue ou effective, c'est la même distance car même $|\vec{v}|$ avant et après, mais pas les mêmes positions car la vitesse a changé de sens)

Le champ électrique de convection vient de la position attendue.

Champ magnétique de convection: $\vec{B}_{\text{conv.}} = \vec{v} \wedge \vec{E}_{\text{conv.}}$
↑ en l'événement source



Dans la zone extérieure à la sphère de rayonnement: événements sources antérieurs au choc.

Dans la zone intérieure, événements sources postérieurs au choc

V. Rayonnement d'une charge ponctuelle à basse vitesse

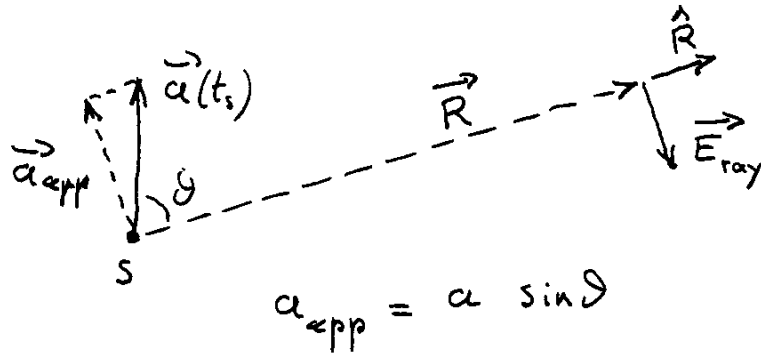
(1) i)

$$\vec{E}_{\text{ray}} \sim -\frac{q}{4\pi R} \frac{\vec{a}_{\text{app}}}{R}$$

crée par une source $\left\{ \begin{array}{l} \text{charge } q \\ \text{à } t_s, \text{ en } \vec{r}_s = \vec{r}_q(t_s) \\ \text{vitesse } v_q(t_s) \ll 1 \end{array} \right.$

champ $\vec{E}_{\text{ray}} \left\{ \begin{array}{l} \text{en } \vec{r} = \vec{r}_s + \vec{R} \\ \text{à } t = t_s + R \end{array} \right.$

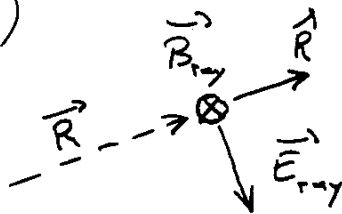
accélération "apparente" de la charge \vec{a}_{app} à t_s .



ii)

$$\vec{B}_{\text{ray}} = \hat{R} \wedge \vec{E}_{\text{ray}}$$

iii)



$$(\hat{R}, \vec{E}_{\text{ray}}, \vec{B}_{\text{ray}}) = \text{trièdre}$$

$$|\vec{E}_{\text{ray}}| = |\vec{B}_{\text{ray}}| \propto \frac{1}{R}$$

(Propriétés générales du rayonnement d'une charge ponctuelle, \forall la vitesse de la source.)

iv) Vecteur de Poynting: $\vec{S} \hat{=} \vec{E} \wedge \vec{B}$

Pour le rayonnement:

$$\vec{S}_{\text{ray}} = E_{\text{ray}}^2 \hat{R}$$

v) Flux du vecteur de Poynting,
à travers $d^2A = \hat{R} R^2 d^2\hat{R}$,
pendant dt ,

$$\Rightarrow d^3W_{\text{ray}} = \vec{S}_{\text{ray}} \cdot d^2A dt$$

$$= E_{\text{ray}}^2 R^2 d^2\hat{R} dt$$

$$d^3W_{\text{ray}} = \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2 a^2 \sin^2\vartheta d^2\hat{R} dt$$

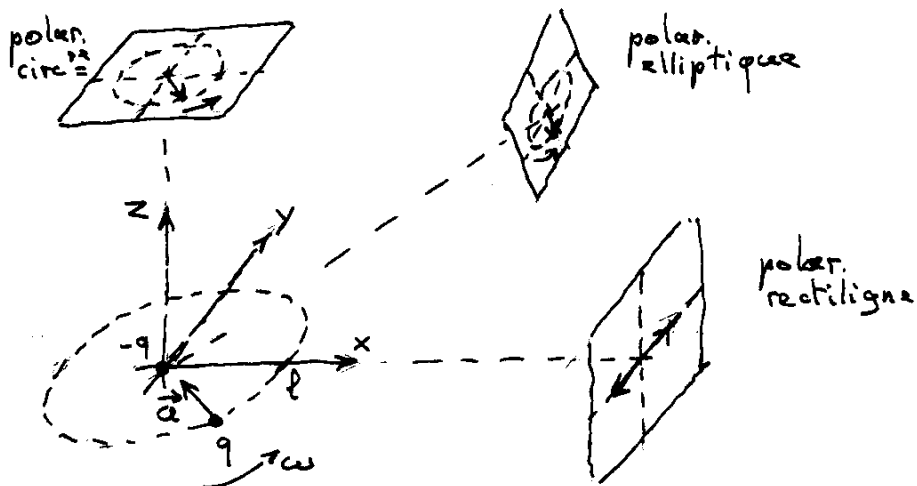
vi) Puissance rayonnée :

$$d^2\vec{S}_{\text{ray}} = \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2 a^2 \sin^2\vartheta d^2\hat{R}$$

$$P_{\text{ray}} = \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2 a^2 \underbrace{\int_{4\pi} d^2\hat{R} \sin^2\vartheta}_{= \frac{2}{3} 4\pi}$$

$$P_{\text{ray}} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi} a^2 \equiv \mathcal{R} \text{ taux de Larmor}$$

② Dipôle $\vec{p} = q\vec{l}$ tournant à ω :



Puissance totale rayonnée par la charge accélérée q :

$$P_{\text{ray}} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi} a^2, \text{ si } v = \omega l = \omega \frac{p}{q} \ll 1$$

$$\text{avec } a = \omega^2 l = \omega^2 \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow P_{\text{ray}} = \frac{2}{3} \frac{p^2}{4\pi} \omega^4$$

Distribution angulaire ? $\frac{d^2 \vec{P}_{\text{ray}}}{d^2 \hat{R}} = \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2 a_{\text{app}}^2$

Suivant l'axe de rotation \hat{z} :

$$a_{\text{app}} = a = \omega^2 l = \omega^2 \frac{p}{q}$$

$$\frac{d^2 \vec{P}_{\text{ray}}}{d^2 \hat{R}} = \frac{1}{4\pi} \frac{p^2}{4\pi} \omega^4, \text{ polarisée circulaire}$$

Dans la direction \hat{x} , dans le plan de rotation :

$$a_{\text{app}} = a_y = a \sin \omega t \quad (\text{à une phase près})$$

$$\frac{d^2 \vec{P}_{\text{ray}}}{d^2 \hat{R}} = \frac{1}{4\pi} \frac{p^2}{4\pi} \omega^4 \sin^2 \omega t, \text{ polarisée rectiligne}$$

Dans une direction du plan (\hat{x}, \hat{z}) , angle ϑ par rapport à \hat{x} :

$$\begin{cases} a_x = a \cos \omega t \\ a_y = a \sin \omega t \\ a_z = 0 \end{cases} \quad \hat{R} = \begin{cases} \cos \vartheta \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{cases}$$

$$\vec{a}_{\parallel} = (\vec{a} \cdot \hat{R}) \hat{R} = a \cos \vartheta \cos \omega t \hat{R}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel} = \begin{cases} a \cos \omega t - a \cos^2 \vartheta \cos \omega t \\ a \sin \omega t \\ -a \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \omega t \end{cases}$$

$$\frac{d^2 \vec{P}_{\text{ray}}}{d^2 \hat{R}} = \frac{1}{4\pi} \frac{p^2}{4\pi} \omega^4 \frac{a_{\text{app}}^2}{a^2}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{a_{\text{app}}^2}{a^2} &= \cos^2 \omega t (1 - \cos^2 \vartheta)^2 + \sin^2 \omega t + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \omega t \\ &= \cos^2 \omega t (1 - 2\cos^2 \vartheta + \cos^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta) + \sin^2 \omega t \\ &= \cos^2 \omega t [1 - 2\cos^2 \vartheta + \cos^4 \vartheta + (1 - \cos^2 \vartheta) \cos^2 \vartheta] + \sin^2 \omega t \\ &= \cos^2 \omega t (1 - \cos^2 \vartheta) + \sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{P}_{\text{ray}}}{d^2 \hat{R}} = \frac{1}{4\pi} \frac{p^2}{4\pi} \omega^4 (1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \omega t)}$$

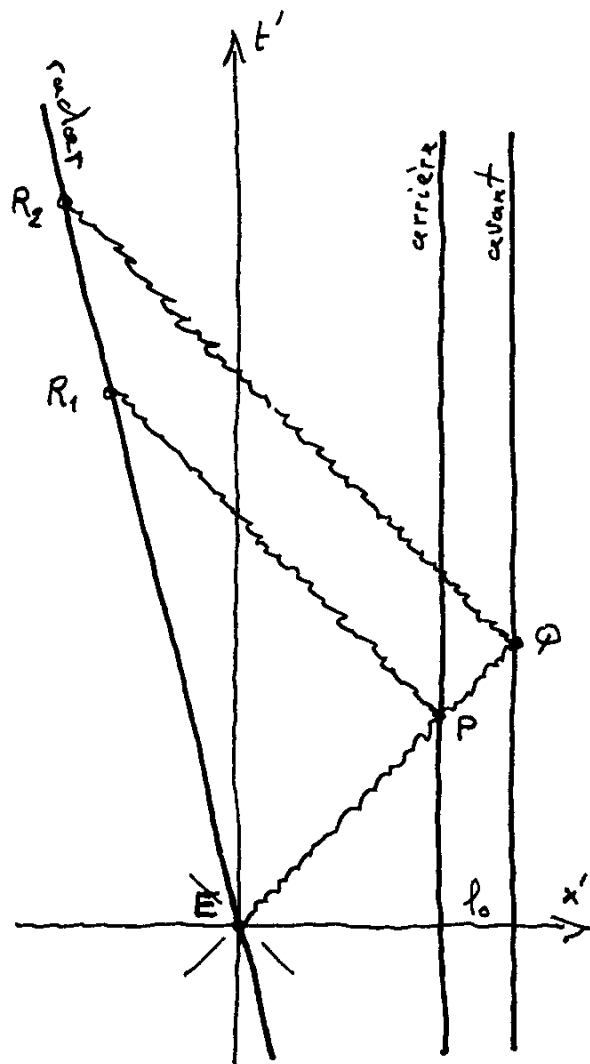
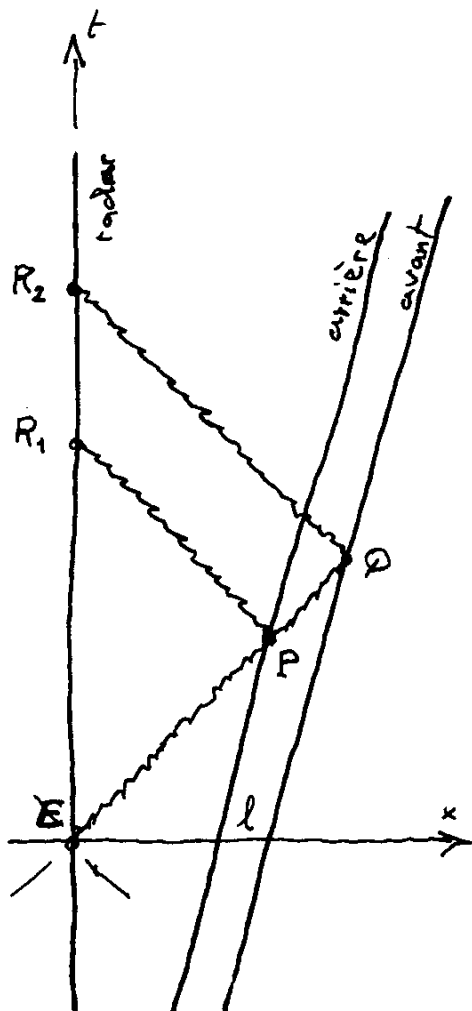
Vérifications pour la direction \hat{z} , $\vartheta = \frac{\pi}{2}$
 ----- \hat{x} , $\vartheta = 0$

Pour vérifier la puissance totale, il faudrait calculer $\frac{d^2 \vec{P}_{\text{ray}}}{d^2 \hat{R}}$ dans une direction quelconque,

soit $\hat{R} = \begin{cases} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \end{cases}$, puis intégrer sur toutes ces directions.

VI Observations radar

①



② Distance de quel point du vaisseau?
à quel instant?

Par exemple de l'arrière du vaisseau
à réception du signal incident
soit $x_P - x_E$

$(E, P) = \text{lumière}$

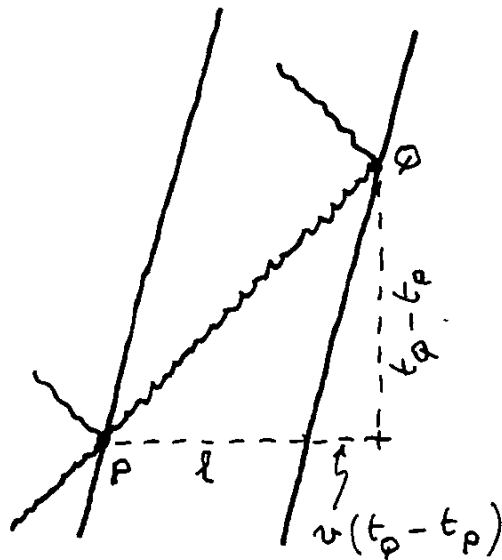
$$\Rightarrow x_P - x_E = t_P - t_E = \frac{t_{R_1} - t_E}{2} = \frac{200}{2}$$

$$x_P - x_E = 100 \text{ s} = 3 \times 10^{10} \text{ m}$$

(3)

 $(P, \varphi) = \text{lumière}$

$$\Rightarrow t_{\varphi} - t_P = x_{\varphi} - x_P$$



$$\Rightarrow t_{\varphi} - t_P = l + v(t_{\varphi} - t_P)$$

"Contraction des longueurs":

$$l = l_0 \sqrt{1-v^2}$$

$$\Rightarrow (1-v) \Delta t = l_0 \sqrt{1-v^2}, \text{ avec } \Delta t \triangleq t_{\varphi} - t_P$$

$$(1-v)^2 \Delta t^2 = l_0^2 (1-v^2)$$

$$(\Delta t^2 + l_0^2) v^2 - 2 \Delta t^2 v + \Delta t^2 - l_0^2 = 0$$

$$v = \frac{1}{\Delta t^2 + l_0^2} \left\{ \Delta t^2 \pm \sqrt{\Delta t^4 - (\Delta t^2 + l_0^2)(\Delta t^2 - l_0^2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta t^2 + l_0^2} \left\{ \Delta t^2 \pm \sqrt{\Delta t^4 - (\Delta t^4 - l_0^4)} \right\}$$

$$v < 1 \Rightarrow v = \frac{\Delta t^2 - l_0^2}{\Delta t^2 + l_0^2} = \frac{\left(\frac{\Delta t}{l_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\Delta t}{l_0}\right)^2 + 1}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\varphi} - t_E = \frac{t_{R_2} - t_E}{2} = \frac{t_{R_1} + \delta t - t_E}{2} \\ t_P - t_E = \frac{t_{R_1} - t_E}{2} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \Delta t = t_{\varphi} - t_P = \frac{\delta t}{2} = \frac{17,4 \times 10^{-6}}{2} = 8,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$l_0 = 600 \text{ m} = \frac{600}{3 \times 10^8} = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$\frac{\Delta t}{l_0} = \frac{8,7}{2} = 4,35 \Rightarrow v = \frac{(4,35)^2 - 1}{(4,35)^2 + 1} = \boxed{0,8996} !$$

(4) Distance 100 s insuffisante techniquement, économiquement et biologiquement pour que le vaisseau ait pu accélérer jusqu'à $v \approx 0,9$.

So long...