Paris 7
PH042
1997–98

THÉORIE CLASSIQUE DES CHAMPS

EXAMEN
mardi 8 septembre 1998, 9 h
$\Delta t = 4\,\text{h}$

Traiter les exercices élémentaires I à V est absolument nécessaire, mais suffisant, pour vous assurer la moyenne. Les exercices VI à VIII, plus intellectuels, culturels ou techniques, ne sont à entreprendre qu'ensuite.

I. INVARIANT ET RELATIVITÉ DES TEMPS

Gilles et Dominique tous deux inertes sont néanmoins animés d'une vitesse relative de $2{,}4 \times 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

1. Dominique fête ses quinzième et seizième anniversaires en les événements D_{15} et D_{16}. Quelle est, pour Gilles, la différence de temps (en années par exemple) entre ces deux événements ?

2. Gilles pour sa part fête ses quinzième et seizième anniversaires en G_{15} et G_{16}. Quelle est, pour Dominique, la différence de temps entre ces deux événements ?

3. Représentez toute cette histoire d'abord sur un graphe d'espace-temps dans le repère de Gilles, puis dans le repère de Dominique, dans le cas où Gilles et Dominique se rencontrent pour fêter ensemble leur quinzième anniversaire.

II. EN MOUVEMENT À ACCÉLÉRATION PROPRE CONSTANTE

Albert est inerte tandis que Sophie est en mouvement rectiligne à accélération propre constante de module $a = 9{,}8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$. Albert choisit son axe $\hat{x}$ au plus simple pour analyser cette situation et il adopte comme origine O l'événement de sa vie où Sophie est alors la plus proche. Cette distance minimale d'approche vaut $1/a$.

1. Calculez la valeur de l'accélération propre a en année^{-1}.

2. Représentez les lignes d'univers de Sophie et Albert sur un graphe d'espace-temps dans le repère d'Albert.

3. Rappelez, sans démonstration, l'équation de la ligne d'univers de Sophie dans le système de coordonnées (t, x, y, z) utilisé par Albert.

4. Sur le même graphe, une droite (D) passant par O coupe la ligne d'univers de Sophie au point A.
i) Calculez les coordonnées t_A et x_A de l'événement A en fonction de la pente de la droite.
ii) Quelle est l'équation de la tangente (T) à la ligne d'univers de Sophie en A ?
iii) Comparez les pentes de la droite (D) et de la tangente (T). Quelle propriété géométrique en déduisez-vous ?

5. En déduire une méthode graphique simple pour construire l'ensemble des événements qui, pour Sophie, sont simultanés avec un événement donné de sa vie.

III. CONSTANTES DU MOUVEMENT

1. Rappelez la définition de la quadri-impulsion d'une particule. Quelle est l'utilité d'une telle notion ?

2. En déduire les expressions de l'énergie et de l'impulsion d'une particule de masse m, vitesse $\mathbf{v}$.

3. En déduire les identités remarquables satisfaites par ces grandeurs.

4. Étendant ces identités au cas, observé expérimentalement, d'une particule dont le module de l'impulsion est égal à l'énergie, quelles propriétés en déduisez-vous pour cette particule ?

IV. ÉLECTRODYNAMIQUE

1. *i*) Rappeler les équations des variations dp^0/dt et $d\mathbf{p}/dt$ régissant l'évolution de l'énergie et de la quantité de mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique.
ii) L'accélérateur linéaire de Stanford communique à des électrons une énergie de 20 GeV. Calculer la vitesse des électrons à cette énergie. En admettant que le champ électrique accélérateur est uniforme sur une longueur de 3 km, évaluer ce champ.

2. *i*) Établir les expressions de chacune des composantes du tenseur du champ électromagnétique en fonction des composantes des champs électrique et magnétique.
ii) En déduire les expressions des transformations des composantes des champs électrique et magnétique lors d'une transformation spéciale de Lorentz.
iii) Établir les expressions des invariants du champ électromagnétique.

V. CONVECTION ET RAYONNEMENT

Une particule de charge positive au repos subit un choc qui la propulse librement à $1{,}8 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Représentez l'allure, 10^{-9} s après le choc, du champ électrique et du champ magnétique créés par la charge.

VI. JUSTE POUR VOIR

Éléonore, comme bien des étudiants avant elle, est tentée d'envisager la transformation des coordonnées

$$\begin{cases} t' \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma\,(t-\beta x), \\ x' \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma\,(x-\beta t), \\ y' \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma\,(y-\beta t), \\ z' \overset{\mathrm{df}}{=} z, \end{cases}$$

caractérisée par le paramètre β, avec $\gamma \overset{\mathrm{df}}{=} (1-\beta^2)^{-1/2}$. Les lois de la physique étant valides dans le système de coordonnées (t, x, y, z), Éléonore examine l'aspect de quelques unes de ces lois dans le nouveau système de coordonnées.

1. Quelle forme prend l'équation d'onde homogène dans le système de coordonnées (t', x', y', z') ?

2. Soit deux événements séparés par les intervalles de coordonnées Δt, Δx, Δy, Δz et $\Delta t'$, $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ respectivement. Comparez les valeurs de $\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ et $\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$.

3. Quelle signification peut-on attribuer au paramètre β ?

4. Pouvez-vous trouver une écriture vectorielle pour la transformation d'Éléonore (t' et $\mathbf{r}'$ en fonctions de t, $\mathbf{r}$ et...) ?

5. Les transformations d'Éléonore sont-elles compatibles avec les principes de relativité, d'invariance par rotation, de causalité ?

VII. EFFET COMPTON

On considère la diffusion élastique d'un photon sur un électron.

1. Quelle est la relation entre les quadri-impulsions initiales $\underset{\sim}{p}$ et $\underset{\sim}{q}$, du photon et de l'électron respectivement, et les quadri-impulsions finales $\underset{\sim}{p}'$ et $\underset{\sim}{q}'$?

2. Dans le cas où l'on ne mesure pas les caractéristiques (énergie et direction) de l'électron final, un moyen commode de les éliminer de l'analyse consiste à exprimer sa quadri-impulsion $\underset{\sim}{q}'$ en fonction des trois autres quadri-impulsions et à calculer le carré de cette relation. En déduire alors une relation entre produits scalaires des quadri-impulsions $\underset{\sim}{p}$, $\underset{\sim}{p}'$ et $\underset{\sim}{q}$.

3. On étudie désormais le cas où, dans l'état initial, l'électron est *au repos*. Le photon incident, d'énergie p^0, est diffusé sous un angle ϑ.
i) Que devient la relation précédente ? En déduire la valeur de l'énergie p'^0 du photon diffusé, ainsi que l'expression de la différence $(1/p'^0) - (1/p^0)$.
ii) En déduire l'expression de l'énergie finale q'^0 de l'électron en fonction de p^0 et ϑ.
iii) Pour quelles valeurs de l'angle de diffusion l'énergie du photon final est-elle maximale ? minimale ? Calculez ces valeurs d'énergie. En déduire l'expression de l'énergie maximale de l'électron dans l'état final.

4. En théorie quantique du rayonnement, un état du rayonnement électromagnétique de fréquence ω est décrit en termes de photons d'énergie $\hbar\omega$. En électrodynamique classique, le rayonnement diffusé par une particule chargée a la même fréquence que le rayonnement incident. (Au fait, pouvez-vous justifier brièvement cette assertion ?) La variation de longueur d'onde du rayonnement au cours de la diffusion est donc un phénomène spécifiquement quantique, appelé effet Compton.
i) Pour évaluer la pertinence de l'effet Compton, calculez l'énergie finale d'un photon diffusé à 90° lorsque le photon incident a une énergie de 10 keV, de 10 MeV.
ii) Lors de la diffusion de photon par la matière, pourquoi invoque t-on plus souvent l'effet Compton sur les électrons sans mentionner les nucléons ni les noyaux ?
iii) Des photons de 2,19 MeV (rayonnement gamma) sont absorbés dans l'aluminium. Calculez l'énergie maximale des électrons de recul Compton.
iv) Un faisceau de photons de 50 keV (rayonnement X) traverse une feuille d'aluminium. Calculez les énergies maximale et minimale trouvées parmi les photons diffusés.

VIII CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

À chaque événement (t, x, y, z) dans un domaine de l'espace-temps sont associées les quantités

$$\begin{cases} E_x(t,x,y,z) = 0 \\ E_y(t,x,y,z) = E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_z(t,x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x(t,x,y,z) = 0 \\ B_y(t,x,y,z) = 0 \\ B_z(t,x,y,z) = B_0 \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

1. *i*) Montrez que ces champs sont solution des équations de Maxwell, moyennant des conditions, à déterminer, que doivent satisfaire les constantes E_0, B_0, ω, k et les sources ρ et $\mathbf{j}$ dans le domaine précité.
ii) Dorénavant on se place dans ces conditions, dans le cas $\mathbf{j} = 0$. Quel nom porte ce type de solution ?

2. En cas de transformation spéciale de Lorentz de vitesse β le long de l'axe $\hat{x}$...
i) Déterminez chacune des composantes $E'_x(t', x', y', z')$, $E'_y(...)$, ... $B'_z(t', x', y', z')$ dans le nouveau repère.
ii) Comparez avec les expressions des composantes p'^μ de l'impulsion d'une particule dont les composantes valent p^t, $p^x = p^t$, $p^y = p^z = 0$ dans le premier repère.

3. En cas de transformation spéciale de Lorentz de vitesse β le long de l'axe $\hat{y}$...
i) Déterminez chacune des composantes $E'_x(t', x', y', z')$, *etc.* dans le nouveau repère.
ii) En déduire les composantes de la direction $\hat{k}'$ de propagation de la solution dans le nouveau repère.
iii) Calculez $\mathbf{E}'^2$.
iv) Calculez $\mathbf{B}'^2$ et $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'$. Ces résultats étaient ils prévisibles ?
v) Calculez $\mathbf{E}' \cdot \hat{k}'$ et $\mathbf{B}' \cdot \hat{k}'$. Qu'en concluez-vous sur la nature de la solution $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$?

17.08

Invariant ...

$v = 2{,}4 \times 10^{8}\, m\, s^{-1} = \frac{2{,}4}{3} = \frac{0{,}8 \times 3}{3} = 0{,}8 = \frac{4}{5}$

(1) $\underbrace{\Delta t^2}_{1} - \underbrace{\Delta x^2}_{0} = \underbrace{\Delta t'^2 - \Delta x'^2}_{\text{Gilles}} = \Delta t'^2 \left(1 - \frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right)$

Dom

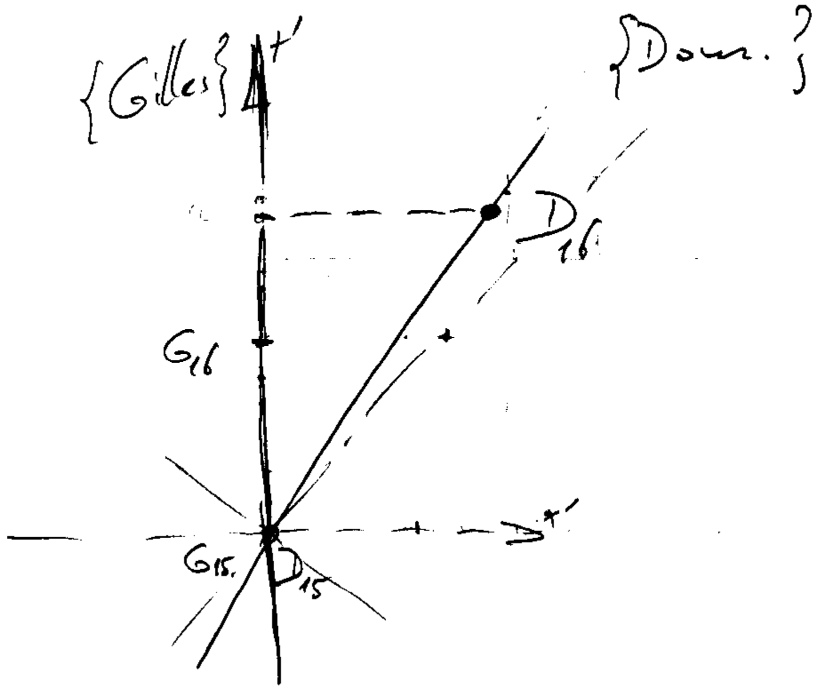
$v_{Dom/Gilles}$

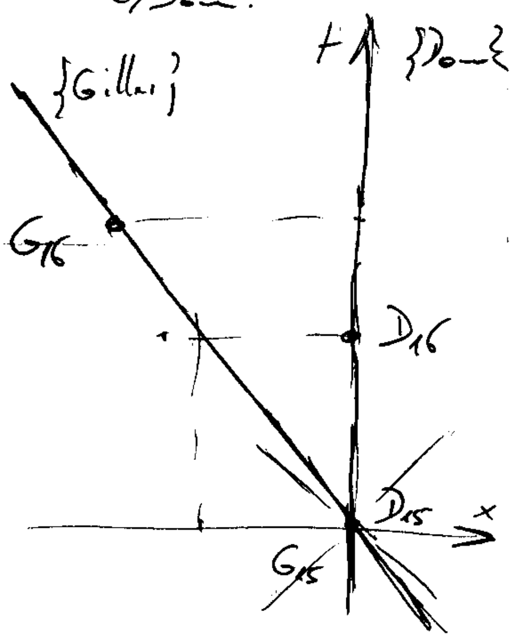
$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{5}{3} = \boxed{1{,}66\ an}$

(2) $\underbrace{\Delta t^2 - \Delta x^2}_{\text{Dom}} = \underbrace{\underbrace{\Delta t'^2}_{1} - \underbrace{\Delta x'^2}_{0}}_{\text{Gilles}} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2}} = \boxed{1{,}66\ an}$

$(v_{G/Dom}$.

(3)



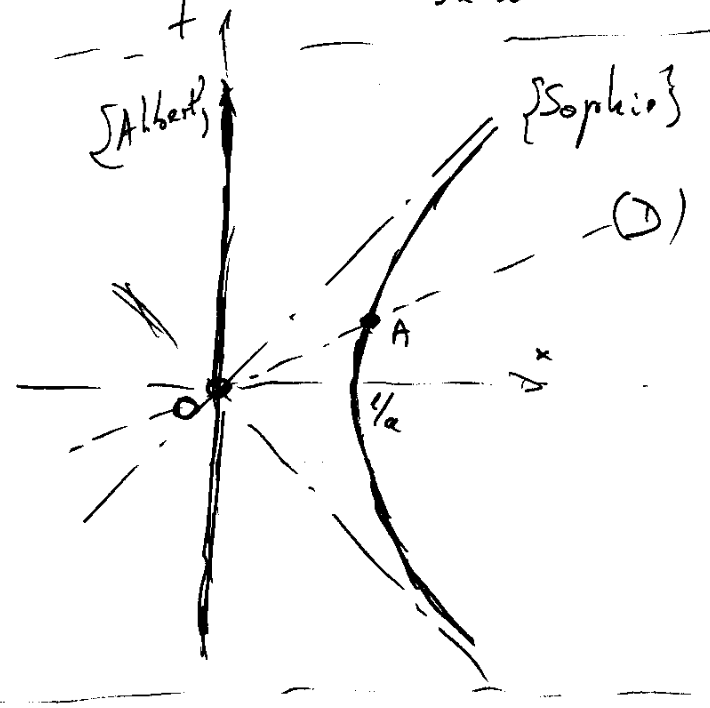


17.20

Mvt acc.

(1) $a = 9{,}8\ ms^{-2} = \dfrac{9{,}8}{3\times 10^{8}}\ s^{-1} = \dfrac{9{,}8}{3\times 10^{8}}\ 365\times 24\times 3600 = \boxed{1{,}03\ an^{-1}}$

(2)



(3)

hyperbole $(ax)^2-(at)^2=1$

$$\boxed{x = \frac{1}{a}\sqrt{1+(at)^2}}$$

(D) = $t = \alpha x$

(4) $\begin{cases} (D) & t_A = \alpha\, x_A \qquad \alpha<1 \\ (hyp.) & (ax_A)^2-(at_A)^2=1 \end{cases}$

$(ax_A)^2 - \alpha^2(ax_A)^2 = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} ax_A &= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \\ at_A &= \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \end{aligned}}$$

(5) $(ax)^2-(at)^2=1$

$\Rightarrow$ tgte: $x\,dx - t\,dt = 0$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{t}$$

tgte en A: $t = \left(\dfrac{x_A}{t_A}\right)x - \dfrac{x_A^2}{t_A} + t_A = \dfrac{x_A}{t_A}x - \dfrac{x_A^2-t_A^2}{t_A} = \dfrac{1}{\alpha}x - \dfrac{1}{a^2}\,a\,\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$

$$\boxed{t = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\,\frac{1}{a}}$$

$\left(t - t_A = \left(\dfrac{x_A}{t_A}\right)(x - x_A) \right.$

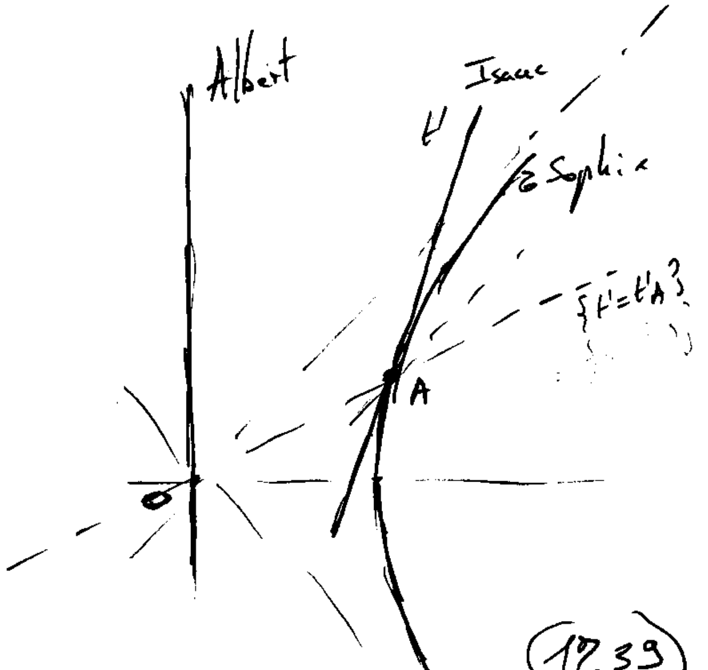
(6) pentes inverses

$\Rightarrow$ (D) et (T) sym. / bissectrice

(7) $(D) = \{ t' = t'_A \}$

$\Rightarrow$ {simultanés avec A pour Isaac, Sophie}

= droite OA



(17.39)

Constantes du mvt

(1) $\tau \longrightarrow \underset{\sim}{U} \hat{=} \frac{d\underset{\sim}{x}}{d\tau} \longrightarrow \boxed{\underset{\sim}{p} \hat{=} m \underset{\sim}{U}}$

(2) $e = p^0 = m U^0 = \boxed{\gamma(v)\, m}$ $\qquad \vec{v} \hat{=} \frac{d\vec{x}}{dt}$

$\vec{p} = m \vec{U} = \boxed{\gamma(v)\, m \vec{v}}$

(3) $\underset{\sim}{p}^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} \implies \boxed{e^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2}$

$\boxed{\frac{\vec{p}}{e} = \vec{v}}$

(4) $|\vec{p}| = e \implies \boxed{\begin{array}{l} m = 0 \\ v = 1 \end{array}}$

(17.44)

Electrodynamique

(1) i) $\frac{dp^0}{dt} = q\, \vec{E} \cdot \vec{v}$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$

ii) $\frac{dp^0}{dt} = q\, E\, \frac{dx}{dt}$

$dp^0 = \underbrace{q\, E}_{cte}\, dx \implies p^0 = q E x$

$\boxed{E = \frac{p^0}{q x}} \approx \frac{20\ 10^9\ eV}{e\ \ 3 \times 10^3\ m} = \boxed{6{,}7 \times 10^6\ V m^{-1}}$

$= 6{,}7 \times 10^4\ V\, cm^{-1}$

(17.50)

(2) i) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_i A_0 - \partial_0 A^i = E_i$$

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -(\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1) = -B_3$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) $t' = \gamma(t - \beta x)$
$x' = \gamma(x - \beta t)$

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E_1' = F'^{10} = \Lambda^1{}_\mu \Lambda^0{}_\nu F^{\mu\nu} = \gamma^2 F^{10} + (\gamma\beta)^2 F^{01} = \gamma^2(1-\beta^2) E_1 = E_1 \\ E_2' = F'^{20} = \Lambda^2{}_2 \Lambda^0{}_\nu F^{2\nu} = \gamma F^{20} - \gamma\beta F^{21} = \gamma(E_2 - \beta B_3) \\ E_3' = F'^{30} = \Lambda^0{}_\nu F^{3\nu} = \gamma F^{30} - \gamma\beta F^{31} = \gamma(E_3 + \beta B_2) \end{cases}$$

dualité ou calcul
$E \to B$
$B \to -E$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1' = B_1 \\ B_2' = \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ B_3' = \gamma(B_3 - \beta E_1) \end{cases}$$

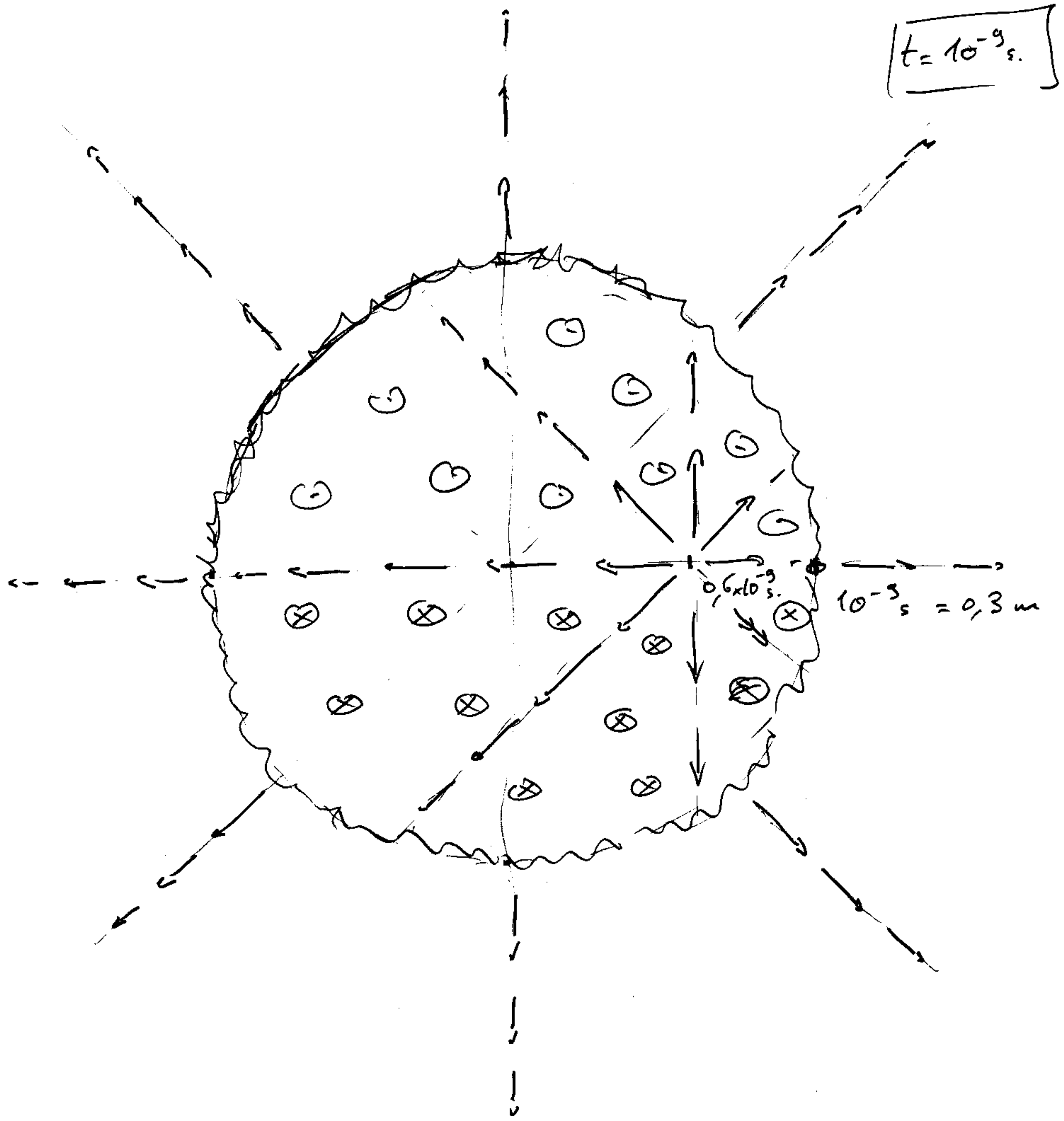
iii) $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = [\vec{E}\cdot(-\vec{E}) + \vec{B}\cdot\vec{B}]\, 2 = 2(B^2 - E^2)$

$F_{\mu\nu}\, {}^*F^{\mu\nu} = [\vec{E}\cdot(-\vec{B}) + \vec{B}\cdot(-\vec{E})]\, 2 = -2\, \vec{E}\cdot\vec{B}$

18.0

Convection, Ray^{nt}.

$v = 1{,}8 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{1{,}8}{3} = 0{,}6 = \frac{3}{5}$



$\vec{B}_{conv.} = \vec{v} \wedge \vec{E}_{conv.}$

18.08

Juste pour voir

$$\begin{cases} t' = \gamma\,(t - \beta x) \\ x' = \gamma\,(x - \beta t) \\ y' = \gamma\,(y - \beta t) \\ z' = z \end{cases} \qquad \rightarrow \quad |\beta| < 1$$

(i) $\qquad F(t',x',y',z') \hat{=} \phi(t,x,y,z)$

$$dF = d\phi$$

$$\frac{\partial F}{\partial t'}dt' + \frac{\partial F}{\partial x'}dx' + \dots = \frac{\partial \phi}{\partial t}dt + \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial t'}\gamma(dt - \beta dx) + \frac{\partial F}{\partial x'}\gamma(dx - \beta dt) + \frac{\partial F}{\partial y'}\gamma(dy - \beta dt) + \dots = \frac{\partial \phi}{\partial t}dt + \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \dots$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \gamma\left(\dfrac{\partial F}{\partial t'} - \beta\dfrac{\partial F}{\partial x'} - \beta\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \gamma\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'} - \beta\dfrac{\partial F}{\partial t'}\right) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \gamma\dfrac{\partial F}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = \dfrac{\partial F}{\partial z'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \gamma^2\left(\dfrac{\partial}{\partial t'} - \beta\dfrac{\partial}{\partial x'} - \beta\dfrac{\partial}{\partial y'}\right)^2 F = \left\{\gamma^2\left(\dfrac{\partial}{\partial t'} - \beta\dfrac{\partial}{\partial x'}\right)^2 - 2\beta\gamma^2(\partial_{t'}\partial_{y'} - \beta\partial_{x'}\partial_{y'}) + \beta^2\dfrac{\partial^2}{\partial y'^2}\right\}F \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \gamma^2\left(\dfrac{\partial}{\partial x'} - \beta\dfrac{\partial}{\partial t'}\right)^2 F = \gamma^2\left(\dfrac{\partial}{\partial x'} - \beta\dfrac{\partial}{\partial t'}\right)^2 F \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \gamma^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \gamma^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'^2} \end{cases}$$

$$\square\phi = \left\{\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \gamma^2(\beta^2 - 1)\frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - 2\beta\gamma^2\partial_{t'}\partial_{y'} + 2\beta^2\gamma^2\partial_{x'}\partial_{y'}\right\}F$$

$$= \left\{\square' - 2\beta\gamma^2(\partial_{t'} - \beta\partial_{x'})\partial_{y'}\right\}F \qquad \text{beurk !}$$

(18.25)

$$\Rightarrow \not\exists \quad \phi' \quad \text{t.q.} \quad \square'\phi' = 0$$

(2)
$$\begin{cases} dt' = \gamma(dt - \beta dx) \\ dx' = \gamma(dx - \beta dt) \\ dy' = \gamma(dy - \beta dt) \\ dz' = dz \end{cases}$$

$$dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = \gamma^2(dt - \beta dx)^2 - \gamma^2(dx - \beta dt)^2 - \gamma^2(dy - \beta dt)^2 - dz^2$$
$$= dt^2 - dx^2 - \gamma^2(dy - \beta dt)^2 - dz^2$$
$$\neq dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ça laisse pas $dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ invar.

(3) pas de relativité loi phys. $\Box\phi = 0 \not\Rightarrow \Box'\phi' = 0$

pas là

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta t) \\ y' = \gamma(y - \beta t) \\ z' = z \end{cases}$$

x et y rôles analogues

plutôt $\frac{\Delta t'}{\Delta t}$

pas d'invers. 2 évèn. reliés causalement ⇒ pas de référentiel universel ⇒ principe de causalité ⇒ mais pas principe de relativité

$$dt' = \gamma\, dt \left(1 - \beta \frac{dx}{dt}\right)$$

$$\text{signe}(dt') = \text{signe}(dt) \times \text{signe}\left(1 - \beta \frac{dx}{dt}\right)$$

couples $|dt| > |dx|$ causale

mais direction $\hat{z}$ bizarre, quelle signification $/\hat{y}$ et $\hat{z}$?

énoncé pas invariant.

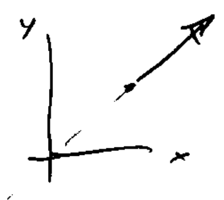
(18.45)

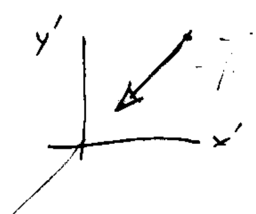
(4) Signif. β ?

$dx' = dy' = dz' = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \beta$, $\frac{dz}{dt} = 0$

vitesse relative à 45°

$dx = dy = dz = 0 \Rightarrow$
$$\begin{cases} dt' = \gamma dt \\ dx' = -\gamma\beta dt \\ dy' = -\gamma\beta dt \\ dz' = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = -\beta, \quad \frac{dy'}{dt'} = -\beta$$





$$\begin{cases} v_x = \beta \\ v_y = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = -\beta \\ v'_y = -\beta \end{cases}$$

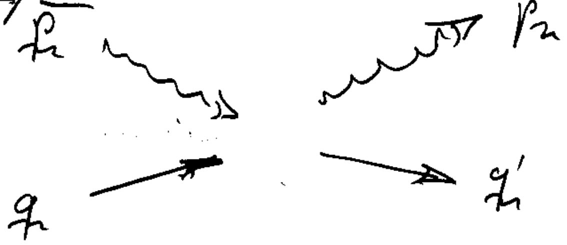
$$|\vec{v}| = \sqrt{2}\,\beta, \quad \beta^2 = \frac{v^2}{2}$$

(5) $\vec{r}' = \vec{r} + \frac{\gamma - 1}{v^2}(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v} - \gamma\vec{v}t$ $\qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{\sqrt{2}}\,\hat{x}\cdot\vec{r}\right)$

t ?!

(18.54)

Compton



(1) $p + q = p' + q'$

(2) $q' = p + q - p'$

$$m^2 = 0 + m^2 + 0 + 2\,p\cdot q - 2\,q\cdot p' - 2\,p'\cdot p$$

$$\Rightarrow \boxed{p\cdot q - q\cdot p' - p'\cdot p = 0}$$

(3)

i) $p^0 m - m p'^0 - p^0 p'^0 (1-\cos\vartheta) = 0$

$$\boxed{\frac{1}{p'^0} - \frac{1}{p^0} = \frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)} \qquad \boxed{p'^0 = \frac{p^0}{1+\frac{p^0}{m}(1-\cos\vartheta)}}$$

ii) $q'^0 = p^0 + m - p'^0$

$$p^0 m - p'^0\left(m + p^0(1-\cos\vartheta)\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$p'^0 = \frac{p^0 m}{m + p^0(1-\cos\vartheta)} \Longrightarrow q'^0 = m + p^0 - \frac{m p^0}{m + p^0(1-\cos\vartheta)}$$

$$\boxed{q'^0 = m\left\{1 + \frac{p^0}{m} - \frac{p^0/m}{1+\frac{p^0}{m}(1-\cos\vartheta)}\right\}}$$

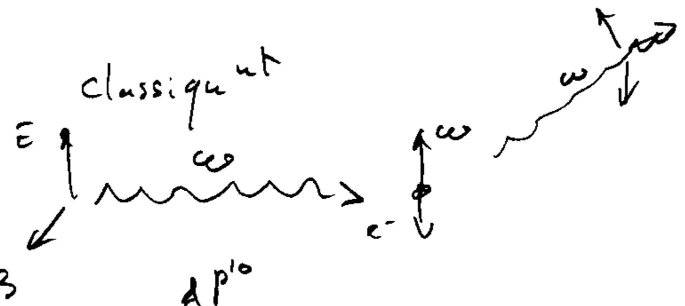
iii) p'^0 mini pour $1-\cos\vartheta$ maxi $= 2$, $\boxed{\vartheta = \pi}$ $\boxed{p'^0_{min} = \frac{p^0}{1+2\frac{p^0}{m}}}$

p'^0 maxi mini $= 0$ $\boxed{\vartheta = 0}$ $\boxed{p'^0_{max} = p^0}$

$$q'^0_{max} = m\left\{1 + \frac{p^0}{m} - \frac{p^0/m}{1+2\frac{p^0}{m}}\right\} = m\left\{1 + \frac{\frac{p^0}{m} + 2\left(\frac{p^0}{m}\right)^2 - \frac{p^0}{m}}{1+2\frac{p^0}{m}}\right\}$$

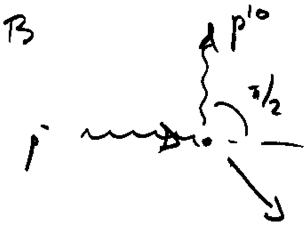
$$\boxed{q'^0_{max} = m\left\{1 + \frac{2\left(\frac{p^0}{m}\right)^2}{1+2\frac{p^0}{m}}\right\}}$$

(4) classiquement



pas de changement de fréquence

i)



$\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\vartheta = 0$ $\quad p'^0 = \dfrac{p^0}{1+\frac{p^0}{m}}$

$p^0 = 10\ \text{keV}$, $p'^0 = \dfrac{10}{1+\frac{10}{511}} = \boxed{9{,}81\ \text{keV}}$

$p^0 = 10\ \text{MeV}$, $p'^0 = \dfrac{10}{1+\frac{10}{0{,}51}} = \boxed{0{,}48\ \text{MeV}}$

ii) $p^0 = |\vec{p}| = \frac{\hbar}{\lambda} \Rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{\hbar}{m}(1-\cos\vartheta)$

effet Compton $\propto \frac{1}{m}$ $\Rightarrow$ 2000 fois + faible pour nucléon

iii) $p^0 = 2{,}19\ \text{MeV}$ $\quad q'^0_{max} = 0{,}51 \left\{ 1 + \underbrace{\dfrac{2\left(\frac{2{,}19}{0{,}51}\right)^2}{1+2\left(\frac{2{,}19}{0{,}51}\right)}}_{4{,}84} \right\} = \boxed{2{,}47\ \text{MeV}}$

iv) $p^0 = 50\ \text{keV}$ $\quad \boxed{p'^0_{max} = 50\ \text{keV}}$ vers l'avant

$p'^0_{min} = \dfrac{50}{1+2\frac{50}{511}} = \boxed{41{,}8\ \text{keV}}$ vers l'arrière

10.24

---

champ électromagn.

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = B_0 \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

(1) i) $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ kE_0 \sin(\omega t - kx) \end{cases}$ $\qquad \partial_t \vec{B} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\omega B_0 \sin(\omega t - kx) \end{cases} \Rightarrow \boxed{kE_0 = \omega B_0}$

$\nabla \cdot E = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$ $\qquad \nabla \cdot B = 0$

$\partial_t E = \begin{cases} 0 \\ -\omega E_0 \sin(\ ) \\ 0 \end{cases}$ $\qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \begin{cases} 0 \\ -kB_0 \sin(\ ) \\ 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = \begin{cases} 0 \\ (\omega E_0 - kB_0)\sin(\omega t - kx) \\ 0 \end{cases}}$

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0$$

$$\boxed{\vec{J} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ \left[1-\left(\frac{k}{\omega}\right)^2\right] \omega E_0 \sin(\omega t - kx) \\ 0 \end{matrix}\right.}$$

$\vec{J} = 0 \Rightarrow$ $E_0 = 0 \Rightarrow B_0 = 0$!

$\boxed{k = \omega} \Rightarrow \boxed{E_0 = B_0}$

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos \omega(t-x) \\ E_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 0 \\ B_z &= E_0 \cos \omega(t-x) \end{aligned}$$

ii) Onde plane polarisée rectiligne, fréq. ω, direct. $\hat{x}$, $\qquad \vec{E}\cdot\vec{B} = 0$, $E^2 - B^2 = 0$

(2) TSL $\beta\hat{x}$

i)

$$\begin{cases} E'_x = E_x = 0 \\ E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} E_0 \cos \omega\left[\gamma(t'+\beta x') - \gamma(x'+\beta t')\right] \\ E'_z = \gamma(E_z - \beta B_y) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{E'_y = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} E_0 \cos\left\{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, \omega\, (t'-x')\right\}}$$

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x = 0 \\ B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) = 0 \\ B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) = \boxed{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} E_0 \cos\left\{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, \omega\, (t'-x')\right\}} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{cases} p^t \\ p^x = p^t \\ p^y = 0 \\ p^z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p'^t = \gamma(p^t - \beta p^x) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, p^t \\ p'^x = \gamma(p^x - \beta p^t) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, p^t \\ p'^y = 0 \\ p'^z = 0 \end{cases} \quad \text{comme} \quad \begin{cases} \omega' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, \omega \\ k' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, \omega \end{cases}$$

(3) TSL $\beta\hat{y}$

$$\begin{cases} \vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel \\ \vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{\beta}\wedge\vec{B}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel \\ \vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \vec{\beta}\wedge\vec{E}) \end{cases}$$

i)

$$\begin{cases} E'_x = \gamma(E_x + \beta B_z) \\ E'_y = E_y \\ E'_z = \gamma(E_z - \beta B_x) \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_x = \gamma(B_x - \beta E_z) \\ B'_y = B_y \\ B'_z = \gamma(B_z + \beta E_x) \end{cases}$$

$$E'_x = \gamma\beta\, E_0 \cos\omega\left\{\gamma(t'+\beta y') - x'\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E'_x &= \gamma\beta\, E_0 \cos\left\{\gamma\omega\left(t' - \frac{1}{\gamma}x' + \beta y'\right)\right\} \\ E'_y &= E_0 \cos\{- - - - -\} \\ E'_z &= 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} B'_x &= 0 \\ B'_y &= 0 \\ B'_z &= \gamma E_0 \cos\{- - - - -\} \end{aligned}}$$

ii) $\boxed{k' = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \\ -\beta \\ 0 \end{cases}}$ vérif $k'^2 = \frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 = 1-\beta^2+\beta^2 = 1$

iii) $\vec{E}'^2 = \underbrace{(\gamma^2\beta^2+1)} E_0^2 \cos^2\left\{\gamma\omega\left(t' - \frac{1}{\gamma}x' + \beta y'\right)\right\}$

$$\hookrightarrow = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}'^2 = \gamma^2 E_0^2 \cos^2\{\gamma\omega(- - -)\}}$$

iv) $\vec{B}'^2 = \gamma^2 E_0^2 \cos^2\{- - -\}$

forcément puisque $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = 0 = \vec{E}'^2 - \vec{B}'^2$

$\vec{E}'.\vec{B}' = 0$ forcément car $\vec{E}.\vec{B} = 0 = \vec{E}'.\vec{B}'$

v) $\vec{E}'.k' = \begin{cases} \gamma\beta \\ 1 \\ 0 \end{cases} . \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \\ -\beta \\ 0 \end{cases} E_0 \cos\{- - -\} = 0$

$\vec{B}'.k' = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{cases} . \begin{cases} 1/\gamma \\ -\beta \\ 0 \end{cases} E_0 - - - = 0$

Encore une onde plane polar. $\mathcal{L}\begin{cases} \gamma\beta \\ 1 \\ 0 \end{cases}$

propag. $k' = \begin{cases} 1/\gamma \\ -\beta \\ 0 \end{cases}$

fréquence $\omega' = \gamma\omega$

11.06