

EMISSION ET ABSORPTION DES PHOTONS

par les atomes (dipol. électrique, lasers....)
les noyaux (émissions ~~et~~ multipolaires...)
les particules élémentaires ($\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma, \dots$)

Bonne source: J. J. Sakurai, p. 36

Pas inutile, avant de se lancer dans la théorie des champs sophistiquée, permet de comprendre le rayonnement d'un atome, le spectre du corps noir, le bleu du ciel, ... (lire le 2^e §, p. VI, de la préface de Sakurai)

Comme exemple de système émetteur-absorbeur, on prend les électrons d'un atome (à noyau α est lourd) en interaction avec le rayonnement quantique.

Hamiltonien du système, en représentation d'interaction

$$H(t) = H_{\text{électrons}} + H_{\text{int.}}(t)$$

avec

$$H_{\text{électrons}} = \sum_{i=1}^Z \frac{\vec{P}_i^2}{2m} + V(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_Z)$$

↑ dans cet exemple comprend en particulier le terme coulombien statique (du au noyau) et qui assure la liaison de l'atome

et, en jauge de radiation ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \rightarrow \vec{P} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{P}$)

$$\begin{aligned} H_{\text{int.}}(t) = & - \sum_i \frac{q_i}{m} \vec{A}(\vec{R}_i, t) \cdot \vec{P}_i \\ & + \sum_i \frac{q_i^2}{2m} \vec{A}^2(\vec{R}_i, t) \\ & - \sum_i g_i \frac{q_i}{2m_i} \vec{S}_i \cdot (\vec{\nabla}_i \wedge \vec{A}(\vec{R}_i, t)) \end{aligned}$$

↑ facteur g ; pour l'électron $g=2$

où on a introduit un terme d'interaction avec le spin, "dérivé" de l'hamiltonien de Pauli pour un quanton de spin $\frac{1}{2}$ dans un environnement électromagnétique (revoir cours de maîtrise).

Absorption d'un photon du mode \vec{k}, α

Système = atome U champ de photons

Partant d'un état initial $|A\rangle | \dots, n_{\vec{k}}, \dots \rangle$ (très idéalisé, un état initial plus réaliste pour le rayonnement devrait être décrit par un opérateur densité), on se demande quelle est la probabilité d'avoir dans l'état du système au temps t l'état dit final $|B\rangle | \dots, n_{\vec{k}} - 1, \dots \rangle$

↑ tous petits points égaux pour ailleurs

Analyse inutile à répéter; toute notre théorie quantique du rayonnement a été faite pour, tout au moins au premier ordre, donner le même résultat que la semi classique

$$|C_B^{(1)}(t)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle B; n_{\vec{k}} - 1 | W | A; n_{\vec{k}} \rangle \right|^2 \cdot t \cdot \delta(E_B - E_A - \hbar\omega)$$

↑ contribution en $e^{-i\omega t}$ dans $\text{Hint}(t)$.

- un seul terme de $\vec{A} \cdot \vec{p}$ contribue
- aucun terme de \vec{A}^2 (le terme en $e^{-i\omega t}$ y détruit 2 γ)
- on néglige la contribution du terme de spin (loisible dans la mesure où la contribution principale n'est pas nulle pour cause de sélection)

Reste :

$$\langle B; n_{\vec{k}} - 1 | W | A; n_{\vec{k}} \rangle = -\frac{q}{m} \langle B; n_{\vec{k}} - 1 | \sum_i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} a_{\vec{k}} \frac{\vec{E}(\omega)}{\hbar} \cdot \vec{p}_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_i} | A; n_{\vec{k}} \rangle$$

D'où

$$\Gamma_{A, n_{\vec{k}} \rightarrow B, n_{\vec{k}} - 1}^{\text{abs}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{q^2}{V} \frac{\hbar n_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 \omega} \left| \langle B | \sum_i \frac{\vec{E}(\omega)}{\hbar} \cdot \frac{\vec{p}_i}{m} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_i} | A \rangle \right|^2$$

$$\dots \delta(E_B - E_A - \hbar\omega)$$

ne pas oublier, $\vec{E} \cdot \vec{p}$ commute avec $e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}$ car $\vec{E} \perp \vec{k}$ à cause de jauge de radiation

et, par comparaison avec l'expression semi classique p. 16, et comme on l'avait déjà trouvé p. 18, on vérifie que la quantique donne le même résultat que la classique pour ce processus, dans cette approximation, à condition d'y prendre pour amplitude $A_{\vec{k}}$ classique

$$A_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar n_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 \omega}}, \quad n_{\vec{k}} = \text{nb. initial de photons}$$

Emission d'un photon du mode \vec{k}, α

Apparence anodine, mais réserve une surprise.
état initial à $t=0$

$$|B\rangle, \dots, n_{\vec{k}, \alpha}, \dots \longrightarrow \text{état à } t$$

Quelle est la probabilité d'y avoir l'état $|A\rangle, \dots, n_{\vec{k}, \alpha} + 1, \dots \rangle$?

Proba de transition $\propto \delta(E_A - E_B + \hbar\omega)$

et seul le terme en $e^{i\omega t}$ dans $H_{int}(t)$ va contribuer à l'élément de matrice de transition

$$\langle A; n_{\vec{k}, \alpha} + 1 | W | B; n_{\vec{k}, \alpha} \rangle = -\frac{q}{m} \langle A; n_{\vec{k}, \alpha} + 1 | \sum_i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} a_{\vec{k}, \alpha}^+ \vec{E}_{\vec{k}, \alpha}^{(W)} \cdot \vec{p}_i e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_i} | B; n_{\vec{k}, \alpha} \rangle$$

d'où (grâce à $\langle n_{\vec{k}, \alpha} + 1 | a_{\vec{k}, \alpha}^+ | n_{\vec{k}, \alpha} \rangle = \sqrt{n_{\vec{k}, \alpha} + 1}$) :

$$\overset{\text{ém.}}{B, n_{\vec{k}, \alpha} \rightarrow A, n_{\vec{k}, \alpha} + 1} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{q^2}{V} \frac{\hbar (n_{\vec{k}, \alpha} + 1)}{2\epsilon_0 \omega} \left| \langle A | \sum_i \vec{E}_{\vec{k}, \alpha}^{(W)} \cdot \frac{\vec{p}_i}{m} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_i} | B \rangle \right|^2 \delta(E_A - E_B + \hbar\omega)$$

Surprise, ce n'est pas tout à fait le même résultat que pour un calcul classique de transition $B \rightarrow A$ stimulée par un rayonnement

$$A_{\vec{k}, \alpha} = \sqrt{\frac{\hbar n_{\vec{k}, \alpha}}{2\epsilon_0 \omega}}$$

C'est quand même bien la même chose quand il y a beaucoup de photons dans l'état initial du rayonnement :

$$\sqrt{n_{\vec{k}, \alpha} + 1} \underset{n_{\vec{k}, \alpha} \gg 1}{\sim} \sqrt{n_{\vec{k}, \alpha}}, \quad \text{quantique et classique équivalentes en rayonnement intense.}$$

mais plus du tout si il y a peu de photons

En particulier, $n_{\vec{k}, \alpha} = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{pas de transition en classique} \\ \text{transition en quantique} \end{cases}$

quantique \rightarrow émission spontanée, et sans aucun effort, Notre description quantique ne fait aucune distinction entre émissions stimulée et spontanée, celle-ci n'étant plus qu'un cas particulier de celle-là.

En (semi) classique, le rayonnement \vec{A} agit sur les ~~quantons~~ quantons chargés, pas l'inverse; les quantons ne sont pas source de rayonnement; toute la quantique, à partir de Bohr était d'ailleurs faite pour cela (empêcher l'effondrement de l'atome d'hydrogène).

Le photon supplémentaire créé (dans le cas de l'émission stimulée) l'est dans le même mode \vec{k}, α (fréquence, direction, polarisation). Classiquement, on disait la lumière émise cohérente avec la lumière incidente.

En champ intense ($n_{\vec{k}\alpha}$ et $A_{\vec{k}\alpha}$ grands), les deux descriptions sont équivalentes, une contribution d'un photon (qu'il soit émis ou absorbé) au rayonnement est négligeable, \vec{A} est alors source (in)épuisable de photons.

Conclusion (Sakurai p.39):

Pour les transitions à 1 photon le résultat du calcul semi-classique est suffisant, à condition de prendre

- pour l'absorption $E_A \rightarrow E_B = E_A + \hbar\omega$

$$\vec{A}_{\text{class.}}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}} n_{\vec{k}\alpha} \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}}$$

- pour l'émission $E_B \rightarrow E_A = E_B - \hbar\omega$

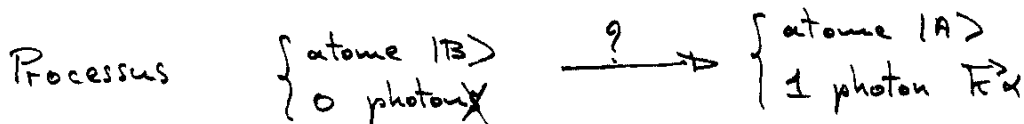
$$\vec{A}_{\text{class.}}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}} (n_{\vec{k}\alpha} + 1) \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}}$$

où $n_{\vec{k}\alpha}$ est le nombre de photons de l'état initial du rayonnement.

A noter qu'à une situation donnée correspond un nombre de photons par unité de volume $n_{\vec{k}\alpha}/V$; le nombre de photons dépend lui du volume adopté pour la caisse à modes.

Emission dipolaire électrique spontanée

- Intérêt :
- processus courant entre niveaux atomiques ou (un peu moins) nucléaires
 - calcul non traité en quantique de la maîtrise
 - bon exemple des techniques de calcul dans cette branche



On reprend notre vieil ami le taux d'émission ($\frac{\text{probab à } t}{t}$) de la page précédente :

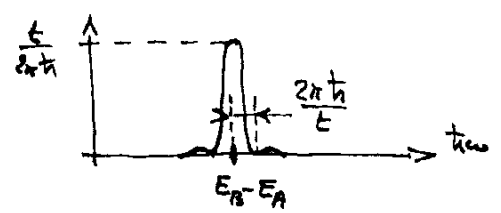
$$\Gamma_{B \rightarrow A, \vec{k}\alpha}^{\text{ém}} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle A | W_{\text{el.}} | B \rangle \right|^2 \delta(E_A - E_B + \hbar\omega)$$

où $W_{\text{el.}}$ est la contribution effective de la partie en $e^{i\omega t}$ de

Hint. : $W_{\text{el.}} = \langle 1_{\vec{k}\alpha} | W | 0 \rangle$

Soit
$$W_{\text{el}} = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \sum_{i=1}^Z \vec{\epsilon}(\omega) \cdot \vec{p}_i e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_i}$$

Rappel (p.14), la "fonction δ " est en fait :



Le détecteur de photons a une résolution finie $\Delta(\hbar\omega)$ et voit donc toutes les transitions dans cet interval, donc pour tous les modes $\in [\omega, \omega + d\omega[$ affectés de leur probabilité respective.

Soit $\rho(\hbar\omega) d(\hbar\omega)$ le nombre de modes $\in [\omega, \omega + d\omega[$; dans l'intégration sur $\Delta(\hbar\omega)$, le pic joue bien son rôle de "fonction δ " dans la mesure où :

i) $\frac{2\pi\hbar}{t} \ll \Delta(\hbar\omega)$

ii) $|\langle A | W_{\text{el}} | B \rangle|^2$ ne varie pas trop sauvagement avec $\hbar\omega$ dans l'intervalle $\frac{2\pi\hbar}{t}$

(e.g. $t = 10^{-8}$ s. $\frac{\hbar}{t} = \frac{\hbar c}{ct} = \frac{197 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8}} = 10^7$ eV !
il n'y a pas de danger)

Alors, au total après intégration $\int \frac{d(\hbar\omega)}{\Delta(\hbar\omega)} \dots$

$\Gamma_{B \rightarrow A, \gamma}^{\text{ém}} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle A | W_{\text{el}} | B \rangle|^2 \rho(\hbar\omega)$, $\hbar\omega = E_B - E_A$

↑ densité de modes (plutôt que d'états, contrairement à l'habitude)

Nombre de modes :

- de polarisation α
- de pulsation \in pavé $(\omega, d\omega)$
- de direction \in pavé $(\hat{k}, d\hat{k})$

$$\rho(\hbar\omega) d(\hbar\omega) = \frac{k^2 dk d\hat{k}}{(2\pi/L)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 d\left(\frac{\omega}{c}\right) d\hat{k}$$

↑ dépend aussi de $\hat{k}, d\hat{k}, \alpha$

$$\rightarrow \rho(\hbar\omega) = \frac{\omega^2 V}{(2\pi)^3 \hbar c^3} d\hat{k}$$

D'où le taux d'émission de photon \hat{k}, α dans l'angle solide $d\hat{k}$:

$$W_{\hat{k}, \alpha}^{\text{ém}} d\hat{k} \stackrel{\text{df}}{=} \Gamma_{B \rightarrow A, \gamma}^{\text{ém}} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle A | W_{\text{el}} | B \rangle|^2 \frac{\omega^2 V}{(2\pi)^3 \hbar c^3} d\hat{k}$$

D'où la distribution angulaire des photons polarisés α :

$$W_{\vec{k}\alpha} = \frac{q^2 \omega}{8\pi^2 \epsilon_0 m^2 \hbar c^3} \left| \sum_{i=1}^Z \langle A | \vec{\mathcal{E}}_{\vec{k}}(\omega) \cdot \vec{P}_i e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_i} | B \rangle \right|^2$$

$$\uparrow$$

$$\omega = \frac{E_B - E_A}{\hbar}$$

$$\uparrow$$

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$$

Scotte : ne pas être trop honteux si le rapport entre $\Gamma = \frac{\text{prob}(t)}{t}$ et taux de comptage semble rien moins qu'évident. On n'a jamais pu ~~trouver~~ trouver de circonstance mettant en défaut ce genre de résultat. Mais la dérivation en est en tout état de cause peu claire (problème de la mesure en quantique + problème de la description de la désintégration). A quelques exceptions près les physiciens ont sur ces problèmes une attitude autrichienne

Exponentielle d'opérateur :

$$e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_i} = \mathbb{1} - i\vec{k} \cdot \vec{R}_i - \frac{1}{2} (\vec{k} \cdot \vec{R}_i)^2 + \dots$$

appliquée à l'état initial $|B\rangle$.

Pour un atome $\left\{ \begin{array}{l} \text{rayonnement : } \lambda = \frac{1}{k} = 5000 \text{ \AA} \\ \text{distance électron : } \langle r_i^2 | B \rangle \approx 0 \text{ dès que } r_i > 1 \text{ \AA} \end{array} \right.$

→ la contribution de $\vec{k} \cdot \vec{R}_i$ est ≈ 5000 fois plus petite que celle de $\mathbb{1}$ (dans la mesure où l'élément de matrice de $\mathbb{1}$ n'est pas nul; règle de sélection)

$$e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_i} |B\rangle \approx |B\rangle$$

équivalent à prendre l'opérateur de champ $\vec{A}(\vec{r}, t)$ au centre de l'atome, $\vec{r} = 0$, et négliger ses variations dans le domaine des électrons atomiques (approximation de grande longueur d'onde)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \longrightarrow \vec{A}(0, t) \quad \text{en prenant comme origine l'emplacement de l'atome (ou plutôt de son noyau)}$$

Pour un noyau $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{c}{\omega} = \frac{\hbar c}{E} = \frac{197}{1} = 197 \text{ fm} \\ r = 1 \text{ fm} \end{array} \right.$

→ $kr = \frac{1}{197}$; la même approximation est encore justifiée; mais la décroissance des contributions est plus faible; elles seront plus facilement observables (multipôles)

Conclusion: dans la mesure où son élément de matrice n'est pas nul, on ne garde que la contribution du 1.

→ approximation dipolaire électrique E1

$$w_{\vec{k}\alpha} \approx \frac{q^2 \omega}{8\pi^2 \epsilon_0 m^2 \hbar c^3} \left| \sum_i \langle A | \vec{P}_i | B \rangle \cdot \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \right|^2$$

$w_{\vec{k}\alpha} d\hat{k} \cdot t$ = probabilité au temps t d'un photon $\vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)}$ dans la direction \hat{k} et l'angle solide $d\hat{k}$.

Si les 3 composantes de $\sum_i \langle A | \vec{P}_i | B \rangle$ sont nulles, il faut aller chercher le terme suivant dans le développement, ainsi que le terme magnétique normalement négligeable

$$g \frac{q}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B} \propto g \frac{q}{2m} \vec{S} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)}) \propto \frac{q}{m} \hbar \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{q}{m} \vec{A} \cdot \vec{P} \propto \frac{q}{m} \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} \propto \frac{q}{m} \frac{\hbar}{r}$$

Pourquoi dipolaire électrique ?

Pour alléger l'écriture, on considère qu'un seul électron participe à la transition (cœur fermé + 1 particule); sinon, recourir à la quincaillerie du problème à N corps ("2^e quantification" ou coefficients de parenté fractionnelle)

$$w_{\vec{k}\alpha} = \frac{q^2 \omega}{8\pi^2 \epsilon_0 m^2 \hbar c^3} \left| \langle A | \vec{P} | B \rangle \cdot \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \right|^2$$

Mais $[H_{el}, X] = \frac{1}{2m} [P_x^2, X]$
 $= -i \frac{\hbar}{m} P_x$

$$\begin{aligned} \rightarrow \langle A | P_x | B \rangle &= i \frac{m}{\hbar} \langle A | (H_{el} X - X H_{el}) | B \rangle \\ &= i \frac{m}{\hbar} (E_A - E_B) \langle A | X | B \rangle \\ &= -i m \omega \langle A | X | B \rangle \end{aligned}$$

Attention, c'est une égalité entre éléments de matrice particuliers, avec un facteur dépendant des états, pas une égalité entre opérateurs

~~$$\vec{P} = -i m \omega \vec{R}$$~~

Revenons à l'opérateur de champ :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \left\{ a_{\vec{k}, \alpha} \vec{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\alpha)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + a_{\vec{k}, \alpha}^\dagger \vec{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\alpha)} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$$

dans lequel seul le terme créant un photon $\hbar\omega = E_B - E_A$ contribue à la transition $|B; 0\rangle \rightarrow |A; 1_{\vec{k}, \alpha}\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle A; 1_{\vec{k}, \alpha} | -\frac{q}{m} \vec{A}(0, t) \cdot \vec{P} | B; 0 \rangle &= \langle A; 1_{\vec{k}, \alpha} | i q \omega \vec{A}(0, t) \cdot \vec{R} | B; 0 \rangle \\ &= \langle A; 1_{\vec{k}, \alpha} | q \frac{\partial \vec{A}(0, t)}{\partial t} \cdot \vec{R} | B; 0 \rangle \end{aligned}$$

→ Cas particulier du théorème de Siegert :

$$\langle A; 1_{\vec{k}, \alpha} | -\frac{q}{m} \vec{A}(0, t) \cdot \vec{P} | B; 0 \rangle = \langle A; 1_{\vec{k}, \alpha} | -q \vec{R} \cdot \vec{E}(0, t) | B; 0 \rangle$$

↑ parce que on est en jauge de radiation

donc un terme d'interaction effective $\sim -\vec{D} \cdot \vec{E}$

↑ moment dipolaire électrique

→ nom de transition dipolaire électrique

Dans notre approximation, calculer la transition avec la perturbation $-\frac{q}{m} \vec{A}(0, t) \cdot \vec{P}$ ou $-q \vec{R} \cdot \vec{E}(0, t)$ est équivalent.

Mais les opérateurs ne sont pas équivalents; seulement leurs éléments de matrice :

i) entre des états particuliers (solutions stationnaires de l'hamiltonien non perturbé, satisfaisant la condition de résonance $E_B = E_A + \hbar\omega$)

ii) dans une jauge bien particulière (la jauge de radiation)

Depuis la page 11, toute nos dérivations sont dépendantes de jauge, puisque faites dans une jauge particulière (la jauge de radiation). La possibilité de mettre le résultat final sous forme invariante (dépendance en \vec{E}) est ~~très~~ rassurante.

En théorie semi-classique :

- pour un développement multipolaire tronqué de façon invariante voir
 "Gauge Transformations and Quantum Mechanics. I. Gauge Invariant Interpretation of Quantum Mechanics"
 K. H. Yang, Ann. Phys. (N.Y.) 101 (1976) 62
- pour le traitement perturbatif invariant de jauge voir
 "Gauge invariant formulation of the interaction of electromagnetic radiation and matter" D. H. Kobe, A. L. Smirl,
 Am. J. Phys. 46 (1978) 624
- pour savoir pourquoi une dérivation dépendante de jauge donne le bon résultat à la résonance $\hbar\omega = E_B - E_A$, voir
 "Questions of gauge and basis sets for the representation of electromagnetic interactions in quantum mechanics"
 S. Olariu & al.... Phys. Rev. D20 (1979) 3095
- dernière référence sur la controverse: "The question of gauge dependence of transition probabilities in quantum mechanics: facts, myths, and misunderstandings"

En quantique du champ :

- invariance par rapport aux transformations de jauge et de Lorentz sont reliées (comme d'ailleurs invariance galiléenne pour l'équation de Schrödinger)
- il faudrait prendre la jauge de Lorentz (covariante / transf. de Lorentz, contrairement à la jauge de radiation), mais c'est compliqué et fait apparaître des photons longitudinaux et scalaires (temporels) qu'il faut interpréter comme donnant le potentiel coulombien électrostatique, même si leur proportion varie dans une transf. de Lorentz (condition supplémentaire de Fermi ou de Gupta Bleuler au lieu de la condition de jauge; voir "Introduction to quantum field theory" F. Mandl ou "Quantum Electrodynamics" G. Källén). On en discutera peut être un peu plus tard.

Revenons à notre taux d'émission dipolaire électrique :

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{q^2 \omega^3}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} \left| \langle A | \vec{R} | B \rangle \cdot \vec{E}_{\vec{k}} \right|^2$$

$$\langle A | Z | B \rangle = \int d\vec{r} \psi_A^*(\vec{r}) z \psi_B(\vec{r})$$

et généralement \uparrow impair
 $|A\rangle$ et $|B\rangle$ états propres de l'opérateur parité; $[H_{\text{at}}, \pi] = 0$

$\langle A | \vec{R} | B \rangle \neq 0$ seulement si $l_A = -l_B$
 généralement $|A\rangle$ et $|B\rangle$ états propres de L^2 ,
 parités $(-)^{l_A}$ et $(-)^{l_B}$

→ règle de sélection $l_A = l_B \pm 1$

pas plus que 1 pour la même raison que suivante

généralement $|A\rangle$ et $|B\rangle$ aussi états propres de J^2 ,

$$R_{\pm} \stackrel{df}{=} \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (X \pm iY) = R \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \cdot Y_{1\pm 1}(\hat{R})$$

$$R_0 \stackrel{df}{=} Z = R \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \cdot Y_{10}(\hat{R})$$

ayant ainsi exprimé \vec{R} par ses composantes sphériques, on peut utiliser le théorème de Wigner-Eckart

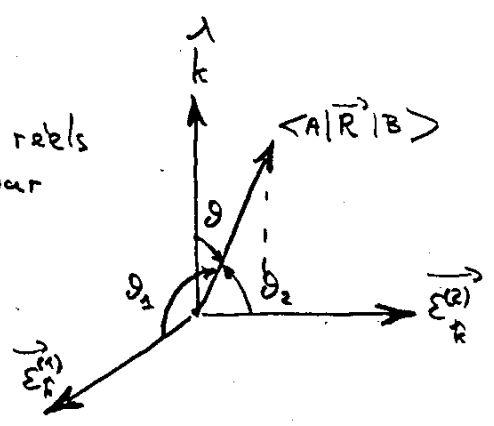
$$\langle \alpha_A j_A m_A | R_q | \alpha_B j_B m_B \rangle = (-)^{j_A - m_A} \begin{pmatrix} j_A & 1 & j_B \\ -m_A & q & m_B \end{pmatrix} \langle \alpha_A j_A | \vec{Y}_1(\hat{R}) | \alpha_B j_B \rangle$$

$$\dots \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty dr r^2 R_{\alpha_A}(r) r R_{\alpha_B}(r)$$

→ règle de sélection $j_A = j_B, j_B \neq 0$
sauf $0 \rightarrow 0$

et évidemment $m_A = m_B + q$

$\langle A | \vec{R} | B \rangle$ = ensemble de 3 nombres, réels pour de lointaines raisons d'invariance par renversement du temps
 → vecteur.



$$\langle A | \vec{R} | B \rangle \cdot \vec{E}^{(1)}(k) = |\langle A | \vec{R} | B \rangle| \cos \theta_1$$

Taux d'émission de photon dans la direction \hat{k} , d'état de polarisation quelconque :

$$w_k = w_{k1} + w_{k2} = \frac{q^2 \omega^3}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle A | \vec{R} | B \rangle|^2 (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2)$$

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

Taux d'émission de photon de { direction \hat{k} } polarisation α quelconques :

$$\Gamma_{B \rightarrow A} = \int d\hat{k} \omega_{\hat{k}}$$

L'élément (ou plutôt les 3 éléments) de matrice $\langle A | \vec{R} | B \rangle$ est indépendant de \hat{k} ; en prenant $\langle A | \vec{R} | B \rangle$ comme axe \hat{z} , il reste à calculer

$$\int d\hat{k} \sin^2 \theta = \int d\hat{k} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} = \frac{2}{3} 4\pi = \frac{8\pi}{3}$$

$$\text{D'où } \Gamma_{B \rightarrow A} = \frac{q^2 \omega^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle A | \vec{R} | B \rangle|^2 = \frac{4}{3} \frac{q^2 / 4\pi \epsilon_0}{\hbar c} \frac{\omega^3}{c^2} |\langle A | \vec{R} | B \rangle|^2$$

$$\boxed{\Gamma_{B \rightarrow A} = \frac{4}{3} \alpha \frac{\omega^3}{c^2} |\langle A | \vec{R} | B \rangle|^2} \quad [\Gamma] = \frac{T^{-3}}{(LT^{-1})^2} \quad L^2 = T^{-1}$$

plutôt α et dans la mesure où $\langle A | \vec{R} | B \rangle \neq 0$, sinon il faut aller chercher l'ordre multipolaire suivant

etc. de structure fine sans dimension = $\frac{1}{137}, \dots$

Cas d'une transition $\alpha_B j_B m_B \rightarrow \alpha_A j_A$ (ou on détecte l'état de J_z de l'atome final)

$$\Gamma_{\alpha_B j_B m_B \rightarrow \alpha_A j_A} = \sum_{m_A} \Gamma_{\alpha_B j_B m_B \rightarrow \alpha_A j_A m_A}$$

et si il n'y a pas de champ magnétique extérieur statique (pas d'effet Zeeman), les différents m_A sont dégénérés et notre description de l'univers ~~atomique~~ (ou plus modestement de l'atome + rayonnement) devrait être indépendante du choix de l'axe \hat{z} (qui sert à définir J_z dont la valeur propre étiquette l'état initial) sinon on s'est trompé quelque part, où on a mis en évidence une nouvelle violation (!),

$$\Gamma_{\alpha_B j_B m_B \rightarrow \alpha_A j_A} \text{ indépendant de } m_B = \frac{1}{2j_B + 1} \sum_{m_B} \sum_{m_A} \Gamma_{\alpha_B j_B m_B \rightarrow \alpha_A j_A m_A}$$

qui peut généralement se mettre sous la forme

$$C |\langle \alpha_A j_A || \vec{R} || \alpha_B j_B \rangle|^2$$

donc en fonction du seul élément de matrice réduit.

Il va rester qu'à prendre les parties radiales explicites des fonctions d'onde (par exemple $R_{n_A l_A}(r)$ et $R_{n_B l_B}(r)$ pour ~~un~~ un atome d'hydrogène) pour achever le calcul.

Ordres de grandeur

on vient de trouver $\Gamma \propto \alpha \frac{\omega^3}{c^2} a^2$ "rayon" du système

Cas d'un système lié par l'interaction coulombienne (atome) :

$$\hbar \omega \propto \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 a} \rightarrow a^2 \propto \left(\frac{q^2 / 4\pi \epsilon_0}{\hbar \omega} \right)^2 = \alpha^2 \frac{c^2}{\omega^2}$$

↑ un peu surestimé...

→ $\Gamma \propto \alpha^3 \omega = \alpha^3 \frac{c}{\hbar c} \hbar \omega = \left(\frac{1}{137}\right)^3 \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{15}}{137} \hbar \omega$

$\Gamma \propto 10^{15} \hbar \omega$
 $\uparrow_{s^{-1}} \quad \uparrow_{MeV}$

$\hbar \omega$	Γ	nom
1eV	$10^9 s^{-1}$	visible
1keV	$10^{12} s^{-1}$	X
1MeV	$10^{15} s^{-1}$	γ

→ plutôt 10 à 20 MeV dans les noyaux où les bas niveaux sont de même parité (pas E1)

Indépendant de la masse de l'émetteur mais pas de sa charge (relation entre $\hbar \omega$ et q^2)

En fait, noyau pas du tout lié par le coulombien ;

plutôt $\Gamma \propto \alpha \frac{\omega^3}{c^2} a^2 = \alpha (\hbar \omega)^3 \frac{c}{(\hbar c)^3} a^2$
 $= \frac{1}{137} (\hbar \omega)^3 \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{15}}{(137)^3} a^2$

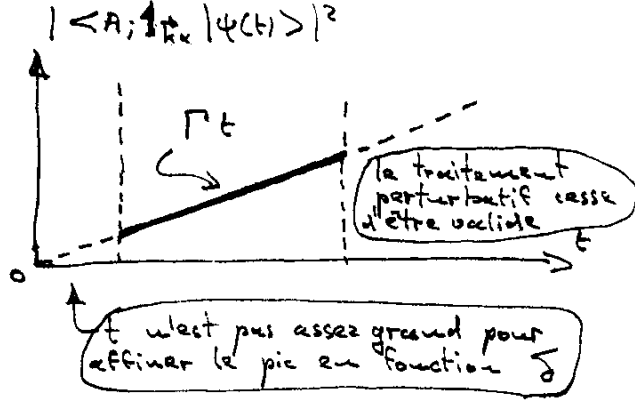
$\Gamma = 3 \cdot 10^{14} (\hbar \omega)^3 a^2$ pas très différent !
 $\uparrow_{s^{-1}} \quad \uparrow_{MeV} \quad \uparrow_{fm}$

Enfin, pour un système à plusieurs charges, ne pas oublier que

$\Gamma_{B \rightarrow A} = \frac{4}{3} \alpha \frac{\omega^3}{c^2} \left| \langle A | \sum_i \vec{R}_i | B \rangle \right|^2$

Scolie : résultat de cette étude par perturbation au premier ordre (règle aurifique de Fermi)

$|\psi(0)\rangle = |B; 0\rangle \xrightarrow{t} |\psi(t)\rangle$



→ bien avant que $\Gamma t = 1$
 On ne peut donc pas se contenter de ce traitement perturbatif pour une théorie de la largeur de raie *
 Première étude due à Weisskopf et Wigner (1930), cf. Heitler p.187, qui se trouve donner
 largeur du niveau B = Γ

* nécessite d'attendre assez longtemps pour voir une variation temporelle de l'état en $e^{-\frac{\Gamma}{2} t}$

Emissions quadrupolaire et magnétique dipolaire

Cas où les états $|A\rangle$ et $|B\rangle$ ne satisfont pas les règles de sélection E1 ; i.e. $\langle A | \vec{r} | B \rangle = 0$

Il faut se rapayer le développement de l'exponentielle p. 71, et puisque la première terme donne une contribution nulle, envisager le deuxième, et puis peut-être aussi celui de spin (cf. p. 66) honteusement négligé jusqu'à là.

$$(\vec{E}(\vec{k}) \cdot \vec{P}) (-i)(\vec{k} \cdot \vec{R})$$



$\Delta j = 0, 1, 2$
 sauf $0 \rightarrow 0$
 $1 \rightarrow \frac{1}{2}$
 $2 \rightarrow \frac{3}{2}$
 $0 \rightarrow 1$

$\Delta j = 0, 1$
 sauf $0 \rightarrow 0$

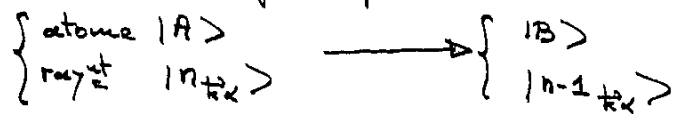
sans changement de parité.

$\Gamma_{E2, M1} \propto \alpha^2 \Gamma_{E1} = 10^{-4} \Gamma_{E1}$ transition beaucoup moins active, mais évidemment beaucoup plus probable dans le cas nucléaire que dans le cas atomique; c'est pourquoi on parle beaucoup plus souvent de ces multipôles chez les nucléaires que chez les atomistes.

Pour les multipôles $> E1$, il existe une technique de calcul plus performante; développer $\vec{E}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ en harmoniques sphériques vectorielles i.e. un développement de Rayleigh de l'onde plane dont les harmoniques sphériques sont recouplées avec les composantes sphériques de $\vec{E}(\vec{k})$.

Détection des photons

Quasiment toujours par le mécanisme



où généralement l'état $|B\rangle$ est non lié (l'électron s'échappe à l'atome qui se retrouve ionisé): processus de photo ionisation ou effet photo électrique.

- Exemples:
- photo cathode d'un photo multiplicateur (éventuellement après conversion dans un scintillateur)
 - émulsion (\rightarrow pas de trace, mais un point, c'est la photographie, activation d'un cristal de bromure d'argent, le photon n'a pas de trajectoire)
 - systèmes à photo ionisation (chambres à fils, ...)
 - mais pas les chambres à bulles (le photon absorbé n'y donne qu'une bulle qui se confond avec l'ébullition parasite)

Le détecteur est constitué par un grand nombre d'atomes indépendants identiques, pratiquement tous dans leur fondamental. On suppose (c'est généralement le cas) que l'absorption est descriptible dans l'approximation dipolaire électrique.

Voir : "Quantum theory of optic coherence"
R.J. Glauber, Phys. Rev. 130 (1963) 2529

→ c'est l'opérateur champ électrique qui intervient (cf. p. 73)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0}} \alpha_{\vec{k}, \lambda} \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda} \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} - \sum_{\vec{k}, \lambda} i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0}} \alpha_{\vec{k}, \lambda}^+ \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda}^+ \frac{e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}}$$

$$= \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) + \vec{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \quad \text{à l'emplacement } \vec{r} \text{ de l'atome}$$

au premier ordre des perturbations et dans l'approximation de l'onde tournante seul $\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t)$ va contribuer à un processus d'absorption (destruction d'un photon)

→ Taux de transition

$$W_{i \rightarrow f} \propto |\langle f | \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle|^2$$

pour l'absorption d'un photon par l'atome situé en \vec{r} , au temps t

C'est ce point de départ général (superficiel ?) de Glauber qui est repris par tous les auteurs, mais dont la signification demande à être précisée. Puisque la probabilité de transition dépend du temps, on ne peut pas parler d'absorption à un instant t .

Analyse plus détaillée par R.J. Glauber, Ecole des Hautes Etudes, "Quantum Optics & Electronics", C. de Witt &... eds, Gordon & Breach (N.Y. 1964)

Filter de lumière avant le détecteur \Rightarrow bande lumière \ll bande amplificateur. Donc \Leftrightarrow largeur de bande infinie \Rightarrow très bonne localisation en temps.

Probabilité de transition à un état $|f\rangle$ quelconque :

$$W \propto \sum_{f \text{ accessibles}} |\langle f | \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle|^2$$

$$= \sum_{\text{tous } f} |\langle f | \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle|^2 \quad \text{puisque les inaccessibles } \rightarrow \text{el. de matr. nul}$$

$$= \langle i | \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle$$

à moyenner sur les états $|i\rangle$ si l'état initial du champ n'est pas pur \rightarrow opérateur densité du champ ρ

$$W = \int \text{Tr} \{ \rho \vec{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{élément de matrice atomique} \\ \text{sensibilité du détecteur (électrons qui s'échappent)} \end{array} \right.$

\rightarrow pour cette question, c'est la fonction de corrélation

$$G^{(1)}(\vec{r}, t, \vec{r}', t') \stackrel{\text{df}}{=} \text{Tr} \{ \rho \vec{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \vec{E}^{(+)}(\vec{r}', t') \}$$

caractéristique du champ électromagnétique, qui intervient.

Pour des questions plus osées, e.g. probabilité pour absorber un photon en \vec{r}_1, t_1 et un photon en \vec{r}_2, t_2 ? c'est alors la fonction de corrélation au 2^e ordre qui intervient:

$$G^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}'_1, \vec{r}'_2) = \text{Tr} \{ \rho \vec{E}^{(-)}(\vec{r}_1) \vec{E}^{(-)}(\vec{r}_2) \vec{E}^{(+)}(\vec{r}'_1) \vec{E}^{(+)}(\vec{r}'_2) \}$$

Des faisceaux de même énergie et spectre peuvent être caractérisés par des $G^{(2)}$ différentes suivant leur origine (corps noir, laser, &c...). Expérience d'Hanbury-Brown & Twiss -

Pour plus de détails là dessus, voir R. Loudon, "the quantum theory of light"

Le formalisme développé à présent pour l'émission ou absorption de photons permet de calculer toute une classe de processus ne mettant pas en jeu de quanton relativiste.

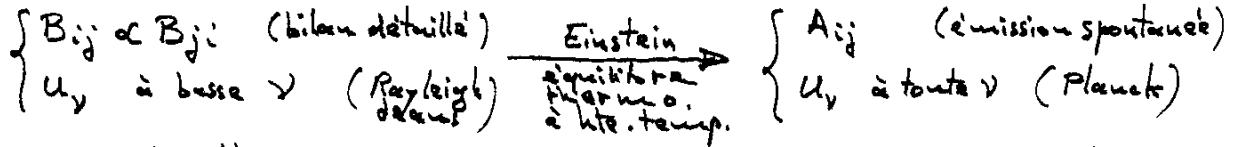
Exemple:

- section efficace de photo ionisation d'un atome d'Hydrogène dans son fondamental (problème n° 2-4 dans J.J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics")
- désintégration du $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ (problème 2-5)

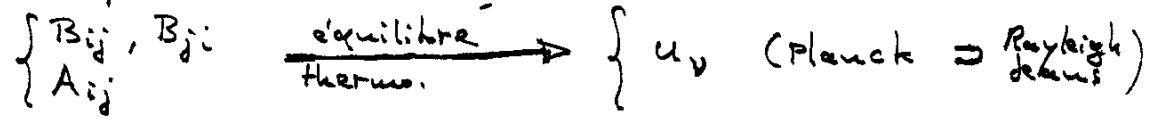
Equilibre Thermodynamique

Entre système à deux états et rayonnement (Sakurai p. 46)
Bon modèle pour atome $\hbar\omega > kT$
mais pas trop

Historique classique :



Avec notre théorie quantique du rayonnement, on peut tenter l'inverse :



Allons y ... pour un atome dans l'état A, la probabilité de l'état B après le temps t est

$$P_{A \rightarrow B}(t) = w_{BA} \cdot t$$

et de même : $P_{B \rightarrow A}(t) = w_{AB} \cdot t$

Ici, ensemble d'atomes et champ en interaction, qui échangent de l'énergie, et donc :

N_A, N_B et $n_{\hbar\omega}$ fluctuent

Fluctuations négligeables / moyennes, si ces moyennes sont assez grandes (système macro); alors, pendant un temps Δt (on doit avoir un rapport avec le théorème de la limite centrale), évolution du nombre moyen d'atomes dans l'état A :

$$\Delta \overline{N_A} = -\overline{N_A} \cdot \overline{w_{BA}} \cdot \Delta t + \overline{N_B} \overline{w_{AB}} \Delta t$$



A l'équilibre thermodynamique, par définition, $\overline{N_A}$ ne dépend plus du temps, $\Delta \overline{N_A} = 0$

$$\rightarrow \overline{N_A} \overline{w_{BA}} = \overline{N_B} \overline{w_{AB}}$$

(p. 67, 68)
$$\frac{\overline{N_B}}{\overline{N_A}} = \frac{n_{\hbar\omega}}{n_{\hbar\omega} + 1}$$

- grâce à notre th. quantique du rayonnement qui nous permet ainsi de nous passer du bilan détaillé
 $w_{abs.} = w_{ém.} \text{ stimulée}$
on ne fait plus de distinction entre émissions stimulées et spontanées

Distribution canonique des atomes en interaction avec le thermostat constitué par le champ (assez grand) :

$$\frac{\overline{N_B}}{\overline{N_A}} = \frac{e^{-\beta E_B}}{e^{-\beta E_A}} = e^{-\beta \hbar\omega}$$

c'est cette condition qui n'est justement pas réalisée dans un laser (inversion de population) et c'est pour cela que le spectre du rayonnement laser n'a rien à voir avec celui du corps noir.

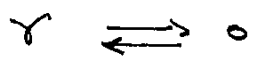
Identification \rightarrow nombre moyen de photons dans le mode k, α :

$$\bar{n}_{k, \alpha} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

Parenthèse : ce nombre moyen était obtenu en physique statistique à l'aide de la distribution de Bose pour un gaz parfait

$$\bar{n}_E = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} - 1}$$

et de la loi d'action de masse appliquée à l'équilibre photons - paroi



$$\mu_\gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{n}_E = \frac{1}{e^{\beta E} - 1}$$

Quelle est dans ces conditions, c'est à dire à l'équilibre thermodynamique, la densité spectrale, c'est à dire l'énergie ^{moyenne} rayonnement par unité de volume et de fréquence $\in [\omega, \omega + d\omega]$?

facile

$$\begin{aligned}
 u(\omega) d\omega &= \frac{1}{V} \sum_{\alpha} \bar{n}_{k, \alpha} \hbar \omega \underbrace{\rho_{k, \alpha} d\omega}_{\rightarrow \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3}} \\
 &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} 2 \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \hbar \omega \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 d\left(\frac{\omega}{c}\right) \\
 &= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} d\omega = \underbrace{8\pi \frac{h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\beta h \nu} - 1}}_{\text{loi de Planck}} d\nu
 \end{aligned}$$

Planck :

$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$	\sim	$\frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3} kT$
---	--------	---

loi de Rayleigh Jeans,

que l'on pouvait trouver par un "principe zéro", au facteur $\pi^2 \approx 10$ près, et dans laquelle n'intervient évidemment pas la constante fondamentale de la quantique \hbar .

Sans nouvelle constante fondamentale il était impossible de trouver autre chose que Rayleigh Jeans. Si la quantique n'existait pas (avec son \hbar) il aurait fallu l'inventer...

Diffusion des photons par un atome

Rayleigh, Thomson, Kramers-Heisenberg, Raman et les autres....

On veut une description du processus $A + \gamma_{\vec{k}, \alpha} \rightarrow B + \gamma_{\vec{k}', \alpha'}$

→ il n'y a que 2 modes en jeu, ça simplifie à peu de frais l'écriture.

On lâche encore du lest en supposant un seul électron de valence (pas 26) et en négligeant dans l'hamiltonien le terme d'interaction spin-champ magnétique (+ faible si les contributions des autres ne sont pas nulles).

$$H_{int}(t) \simeq -\frac{q}{m} \vec{A}(\vec{R}, t) \cdot \vec{P} + \frac{q^2}{2m} \vec{A}(\vec{R}, t)^2$$

avec

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \sum_{\vec{k}, \alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \left\{ a_{\vec{k}, \alpha} \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \alpha} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t)} + a_{\vec{k}, \alpha}^+ \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \alpha} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t)} \right\}$$

Processus $\left\{ \begin{array}{l} \text{destruction d'1 photon } \vec{k}, \alpha \\ \text{création d'1 photon } \vec{k}', \alpha' \end{array} \right.$

→ seuls des termes du type $a_{\vec{k}, \alpha}^+$, $a_{\vec{k}, \alpha}$ ou $a_{\vec{k}', \alpha'}$, $a_{\vec{k}', \alpha'}^+$ pourront contribuer; soit

- i) au premier ordre de la théorie des perturbations le terme \vec{A}^2
- ii) au deuxième ordre, le terme $\vec{A} \cdot \vec{P}$
- iii) &c..... mais plus petits

Terme diamagnétique :

$$\begin{aligned} &\langle B; 0_{\vec{k}, \alpha}, 1_{\vec{k}', \alpha'} | \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2(\vec{R}, t) | A; 1_{\vec{k}, \alpha}, 0_{\vec{k}', \alpha'} \rangle \\ &= \frac{q^2}{2m} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \sqrt{\omega \omega'}} \langle B; 0_{\vec{k}, \alpha}, 1_{\vec{k}', \alpha'} | (a_{\vec{k}, \alpha} a_{\vec{k}', \alpha'}^+ + a_{\vec{k}', \alpha'}^+ a_{\vec{k}, \alpha}) \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}', \alpha'} \dots \\ &\dots e^{i((\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{R} - (\omega - \omega')t)} | A; 1_{\vec{k}, \alpha}, 0_{\vec{k}', \alpha'} \rangle \end{aligned}$$

dans la mesure où l'approximation de grande longueur d'onde est valide :

soit $\lambda_{\text{rayon}} \gg r_{\text{atome}}$
 soit $5000 \text{ \AA} \gg 1 \text{ \AA}$ (ou $197 \text{ fm} \gg 1 \text{ fm}$ dans le cas d'un noyau)
 ou a $e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{R}} | A \rangle \simeq | A \rangle$ (cf. p. 71)

$$\simeq \frac{q^2}{2m} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \sqrt{\omega \omega'}} 2 \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \alpha} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}', \alpha'} e^{-i(\omega - \omega')t} \langle B | A \rangle$$

D'où (au 1^{er} ordre, c.f. p.13) la contribution du terme \vec{A}^2 à l'amplitude de l'état $|B; 0_{\vec{k}_2}, 1_{\vec{k}_1}\rangle$ dans l'état $|\Psi(t)\rangle$:

$$C_{A^2}(t) \simeq \frac{1}{i\hbar} \frac{q^2}{2m} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \sqrt{\omega\omega'}} \sum_{AB} \vec{\epsilon}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}') \int_0^t dt_2 e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_A - \epsilon_B + \hbar(\omega - \omega'))t_2}$$

Terme $-\frac{q}{m} \vec{A} \cdot \vec{P}$:

contribution nulle au 1^{er} ordre; ça va nécessiter le 2^e ordre équation d'évolution (p.13)

$$i\hbar \dot{C}_B(t) = \sum_I e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_B - \epsilon_I)t} \langle B | H_{int}(t) | I \rangle C_I(t)$$

→ au 1^{er} ordre, pour la condition initiale $C_I(0) = \delta_{IA}$

$$C_I^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 e^{i \frac{\epsilon_I - \epsilon_A}{\hbar} t_1} \langle I | H_{int}(t_1) | A \rangle$$

c'est la nullité de la contribution de $\vec{A} \cdot \vec{P}$ à $\langle B | H_{int}(t_1) | A \rangle$ qui nous oblige à aller chercher le 2^e ordre; pour cela on réinjecte l'approximation du premier ordre dans le 2^e membre de l'équation d'évolution

$$C_B^{(2)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \sum_I \int_0^t dt_2 e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_B - \epsilon_I)t_2} \langle B | H_{int}(t_2) | I \rangle \int_0^{t_2} dt_1 e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_I - \epsilon_A)t_1} \langle I | H_{int}(t_1) | A \rangle$$

Maintenant $\vec{A} \cdot \vec{P}$ contribue non nullement à $\langle B | H_{int}(t_2) | I \rangle$ et $\langle I | H_{int}(t_1) | A \rangle$, ce qui permet d'y négliger la contribution de \vec{A}^2 . On fait d'abord l'approximation dipolaire, ce qui donne pour la contribution du terme $\vec{A} \cdot \vec{P}$ à l'amplitude de l'état $|B; 0_{\vec{k}_2}, 1_{\vec{k}_1}\rangle$ dans l'état $|\Psi(t)\rangle$:

$$C_{\vec{A} \cdot \vec{P}}(t) \simeq \frac{1}{(i\hbar)^2} \left(-\frac{q}{m}\right)^2 \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \sqrt{\omega\omega'}} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \dots$$

$$\dots \sum_I \left\{ e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_B - \epsilon_I)t_2} \langle B; 0_{\vec{k}_2}, 1_{\vec{k}_1} | a_{\vec{k}_1}^+ \vec{\epsilon}(\vec{k}_1) \cdot \vec{P} e^{i\omega t_2} | I; 0_{\vec{k}_2}, 1_{\vec{k}_1} \rangle \dots \right.$$

$$\dots e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_I - \epsilon_A)t_2} \langle I; 0_{\vec{k}_2} | a_{\vec{k}_2} \vec{\epsilon}(\vec{k}_2) \cdot \vec{P} e^{-i\omega t_2} | A; 1_{\vec{k}_2} \rangle$$

$$+ e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_B - \epsilon_I)t_2} \langle B; 1_{\vec{k}_2}, 1_{\vec{k}_1} | a_{\vec{k}_2} \vec{\epsilon}(\vec{k}_2) \cdot \vec{P} e^{-i\omega t_2} | I; 1_{\vec{k}_2}, 1_{\vec{k}_1} \rangle \dots$$

$$\dots e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_I - \epsilon_A)t_2} \langle I; 1_{\vec{k}_2}, 1_{\vec{k}_1} | a_{\vec{k}_1}^+ \vec{\epsilon}(\vec{k}_1) \cdot \vec{P} e^{i\omega t_2} | A; 1_{\vec{k}_2} \rangle \left. \right\} \text{out!}$$

la partie photonique des éléments de matrice est triviale à calculer: On a sommé sur les seuls états intermédiaires du rayonnement donnant des contributions non nulles; celles qui restent donnent 1.

$$C_{\vec{A}, \vec{P}}(t) \approx -\frac{1}{\hbar} \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_0 V} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \dots$$

$$\dots \sum_I \left\{ \langle B | \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega')} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle \int_0^t dt_2 e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_B - \epsilon_I + \hbar\omega')t_2} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_I - \epsilon_A - \hbar\omega)t_2} - 1}{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_I - \epsilon_A - \hbar\omega)} \right.$$

$$\left. + \langle B | \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega')} \cdot \vec{P} | A \rangle \int_0^t dt_2 e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_B - \epsilon_I - \hbar\omega)t_2} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_I - \epsilon_A + \hbar\omega')t_2} - 1}{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_I - \epsilon_A + \hbar\omega')} \right\}$$

$$\approx i \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{1}{2\epsilon_0 V} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \dots$$

$$\dots \sum_I \left\{ \frac{\langle B | \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega')} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle}{\epsilon_I - \epsilon_A - \hbar\omega} \right.$$

$$\left. + \frac{\langle B | \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega')} \cdot \vec{P} | A \rangle}{\epsilon_I - \epsilon_A + \hbar\omega'} \right\} \int_0^t dt_2 e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_B + \hbar\omega' - \epsilon_A - \hbar\omega)t_2}$$

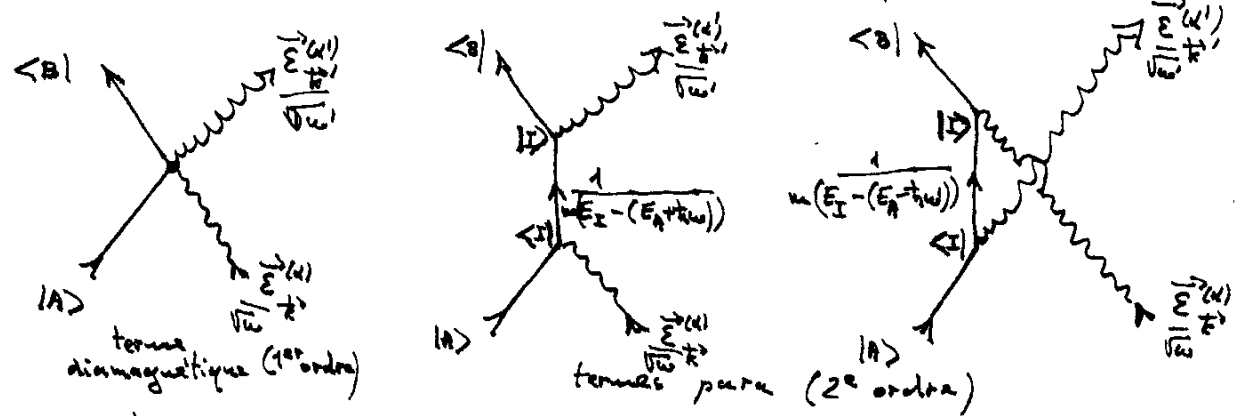
où on n'a gardé qu'une intégrale donnant une contribution en $\frac{1}{\epsilon_B + \hbar\omega' - \epsilon_A - \hbar\omega}$ et négligé deux autres car donnant des contributions en $\frac{1}{\epsilon_B - \epsilon_I + \hbar\omega'}$ et $\frac{1}{\epsilon_B - \epsilon_I - \hbar\omega}$.

On additionne les contributions en \vec{A}^2 et $\vec{A} \cdot \vec{P}$ et effectue la dernière intégrale temporelle :

$$C_{A^2}(t) + C_{\vec{A}, \vec{P}}(t) = \frac{1}{i} \frac{q^2}{m} \frac{1}{2\epsilon_0 V} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_B + \hbar\omega' - \epsilon_A - \hbar\omega)t} - 1}{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_B + \hbar\omega' - \epsilon_A - \hbar\omega)} \dots$$

$$\dots \left\{ \delta_{AB} \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega')} \cdot \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} - \frac{1}{m} \sum_I \left[\frac{\langle B | \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega')} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle}{\epsilon_I - \epsilon_A - \hbar\omega} + \frac{\langle B | \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega')} \cdot \vec{P} | A \rangle}{\epsilon_I - \epsilon_A + \hbar\omega'} \right] \right\}$$

à ces trois types de contributions on peut associer des graffiti, hiéroglyphes, idéogrammes, pictogrammes, graphes



dit diagramme en mouette (vue par un estivant couché sur le côté et regardant le mer ...)

Il ne faut pas avoir peur de ressortir la même vieille astuce :

$$\left| \frac{e^{i \frac{E}{\hbar} t} - 1}{i \frac{E}{\hbar}} \right|^2 = \frac{\hbar^2}{E^2} \left| e^{i \frac{E}{\hbar} \frac{t}{2}} 2i \sin \frac{Et}{2\hbar} \right|^2 = \frac{4\hbar^2}{E^2} \sin^2 \frac{Et}{2\hbar}$$

$$= 2\pi\hbar t \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \frac{Et}{2\hbar}}{\frac{t}{2\hbar} E^2} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 2\pi\hbar t \delta(E)$$

et pour la densité de modes de photon :

$$\rho(\vec{k}', \alpha) d\hat{k}' dk' = \frac{d\hat{k}' k'^2 dk'}{(2\pi/L)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3} d\hat{k}' k'^2 dk'$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} d\hat{k}' \frac{1}{(\hbar c)^3} E'^2 dE' \quad E' = \hbar\omega' = \hbar c k'$$

D'où, pour la probabilité au temps t

- d'un état d'atome $|B\rangle$
- d'un état de photon, de polar $\vec{\epsilon}(\alpha')$ et direction $\in [\hat{k}', \hat{k}'+d\hat{k}']$ (sans plus, i.e. k' quelconque)

$$d\hat{k}' \int dE' |C_{A \rightarrow B}(t) + C_{A \rightarrow P}(t)|^2 \rho(\hat{k}', E', \alpha')$$

$$= d\hat{k}' \left(\frac{q^2}{m} \frac{1}{2\epsilon_0 V} \right)^2 \frac{1}{\omega \omega'} 2\pi\hbar t \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\hbar c)^3} E'^2 \left| \sum_{AB} \dots - \frac{1}{m} \sum_I \dots \right|^2$$

avec, grâce à la fonction δ
 $\hbar\omega' \stackrel{\Delta t}{=} E' \stackrel{\Delta t}{=} E_A + \hbar\omega - E_B$

$$= t d\hat{k}' \left(\frac{q^2}{2\epsilon_0 m} \right)^2 \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^2 c^3} \frac{\omega'}{\omega} \left| \sum_{AB} \dots - \frac{1}{m} \sum_I \dots \right|^2$$

D'où le taux de transition pour le processus $A, \vec{k} \rightarrow B, [\hat{k}', \hat{k}'+d\hat{k}'], \alpha'$

$$\Gamma \stackrel{\Delta t}{=} \frac{\text{Proba}(t)}{t} = d\hat{k}' \left(\frac{q^2}{2\epsilon_0 m} \right)^2 \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^2 c^3} \frac{\omega'}{\omega} \left| \sum_{AB} \dots - \frac{1}{m} \sum_I \dots \right|^2$$

Section efficace

$$\sigma \stackrel{\Delta t}{=} \frac{-\frac{\Delta E}{\Delta t}}{\frac{E}{\Delta t \Delta S}}$$

\leftarrow énergie dissipée du faisceau pendant Δt
 \leftarrow énergie du faisceau incident pendant Δt
 \leftarrow section du faisceau (ou plutôt commune au faisceau et à la cible)

et pour notre processus :

$$d\sigma \stackrel{\Delta t}{=} \frac{-\frac{\Delta E}{\Delta t}}{\frac{E}{\Delta t \Delta S}}$$

\leftarrow énergie dissipée du faisceau pendant Δt , pour ceuse de photon final $[\hat{k}', \hat{k}'+d\hat{k}'], \vec{\epsilon}(\alpha')$

$$\sqrt{E} = -\Gamma \Delta t \hbar \omega$$

$$E = \frac{c \Delta t \Delta S}{V} \hbar \omega$$

$$\rightarrow d\sigma = \frac{V}{c} \Gamma$$

Ce faisant, il y a une légère inconsistance (ce n'est pas la seule) entre notre hypothèse initiale d'un seul photon initial \vec{k}, α et l'utilisation qu'on en fait sous forme de "faisceau". Fort heureusement on trouverait sans doute pareil en analysant le processus $A + n_{\vec{k}, \alpha} \rightarrow B + n-1_{\vec{k}, \alpha} + 1_{\vec{k}', \alpha'}$

Tout s'arrange; il ne reste plus qu'à s'introduire le rayon dit classique de l'électron :

$$r_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\sigma}{m c^2} = \frac{q^2 / 4\pi \epsilon_0}{m c^2} = \frac{q^2 / 4\pi \epsilon_0}{\hbar c} \frac{\hbar}{m c} = \alpha \lambda_{\text{Compton}} = 2,8179380(70) \text{ fm}$$

pour avoir la formule de Kramers - Heisenberg (1925)

$$\frac{d\sigma}{d\vec{k}'} = r_0^2 \frac{\omega'}{c} \left| \sum_{AB} \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega')} \cdot \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} - \frac{1}{m} \sum_I \left[\frac{\langle B | \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega')} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle}{E_I - E_A - \hbar \omega} + \frac{\langle B | \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega')} \cdot \vec{P} | A \rangle}{E_I - E_A + \hbar \omega'} \right] \right|^2$$

- section efficace différentielle pour le processus de diffusion par 1 atome : $A, \vec{k}, \alpha \rightarrow B, [\vec{k}', \vec{k}' + d\vec{k}'] \alpha'$

- dans cette expression $\hbar \omega' \stackrel{\text{def}}{=} E_A + \hbar \omega - E_B$

- la somme sur I doit comprendre les états du continu; contribution fort heureusement généralement négligeable grâce aux dénominateurs.

Diffusion élastique

Cas $A, \vec{k}, \alpha \rightarrow A, [\vec{k}', \vec{k}' + d\vec{k}'] \alpha'$

alors $\omega' = \omega$ et Kramers - Heisenberg \rightarrow

$$\frac{d\sigma}{d\vec{k}'} = r_0^2 \left| \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega)} \cdot \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} - \frac{1}{m} \sum_I \frac{\langle A | \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle + \langle A | \vec{E}_{\vec{k}}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle}{E_I - E_A - \hbar \omega} \right|^2$$

toute l'astuce consiste maintenant à écrire le 1er terme, diamagnétique, sous une forme analogue au second !

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(\omega')} \cdot \vec{E}^{(\omega)} &= \sum_i (\vec{E}^{(\omega')})_i (\vec{E}^{(\omega)})_i = \sum_{ij} (\vec{E}^{(\omega')})_i (\vec{E}^{(\omega)})_j \delta_{ij} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \sum_{ij} (\vec{E}^{(\omega')})_i (\vec{E}^{(\omega)})_j [R_i, P_j] \\ &= \frac{1}{i\hbar} \{ (\vec{E}^{(\omega')} \cdot \vec{R}) (\vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P}) - (\vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P}) (\vec{E}^{(\omega')} \cdot \vec{R}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{E}^{(\omega)} &= \langle A | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{E}^{(\omega)} | A \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left\{ \langle A | (\vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{R}) (\vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P}) | A \rangle - \langle A | (\vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P}) (\vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{R}) | A \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \sum_I \left\{ \langle A | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{R} | I \rangle \langle I | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle - \langle A | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{R} | A \rangle \right\} \end{aligned}$$

Vielle astuce de la p. 72 :

$$\langle A | \vec{R} | I \rangle = - \frac{i\hbar}{m} \frac{1}{E_A - E_I} \langle A | \vec{P} | I \rangle$$

$$\rightarrow \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{E}^{(\omega)} = \frac{1}{m} \sum_I \frac{\langle A | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle + \langle A | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle}{E_I - E_A}$$

ce dénominateur dépendant de I empêche toute fermeture sur I.

On pose $\hbar \omega_{IA} \stackrel{df}{=} E_I - E_A \rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{r_0}{\hbar m} \right)^2 \left| \sum_I \left[\left(\frac{1}{\omega_{IA}} - \frac{1}{\omega_{IA} - \omega} \right) \langle A | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\omega_{IA}} - \frac{1}{\omega_{IA} + \omega} \right) \langle A | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | I \rangle \langle I | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{P} | A \rangle \right] \right|^2 \end{aligned}$$

Diffusion élastique à basse énergie (Rayleigh)

$$\frac{1}{\omega_{IA}} - \frac{1}{\omega_{IA} + \omega} = \frac{\omega}{\omega_{IA} (\omega_{IA} + \omega)} = \frac{\omega}{\omega_{IA}^2} \frac{1}{1 + \frac{\omega}{\omega_{IA}}}$$

$$\sim \frac{\omega}{\omega_{IA}^2} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{IA}} \right)$$

pour un photon incident de basse énergie par rapport aux excitations de l'atome, $\omega \ll \omega_{IA}$
 et en utilisant $\langle A | \vec{P} | I \rangle = i m \omega_{AI} \langle A | \vec{R} | I \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\sim \left(\frac{r_0}{\hbar m} \right)^2 \left| \sum_I \left[- \frac{\omega}{\omega_{IA}^2} \left(1 + \frac{\omega}{\omega_{IA}} \right) m^2 \omega_{IA}^2 \langle A | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{R} | I \rangle \langle I | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{R} | A \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega}{\omega_{IA}^2} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{IA}} \right) m^2 \omega_{IA}^2 \langle A | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{R} | I \rangle \langle I | \vec{E}^{(\omega)} \cdot \vec{R} | A \rangle \right] \right|^2 \end{aligned}$$

les termes en $-\frac{\omega}{\omega_{IA}^2}$ et $\frac{\omega}{\omega_{IA}^2}$ se compensent gentiment;

les 2 autres s'ajoutent

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim r_0^2 \frac{m^2}{\hbar^2} \omega^4 \left| \sum_I \frac{\langle A | \vec{E}_I^{\omega} \cdot \vec{R} | I \rangle \langle I | \vec{E}_I^{\omega} \cdot \vec{R} | A \rangle + \langle A | \vec{E}_I^{\omega} \cdot \vec{R} | I \rangle \langle I | \vec{E}_I^{\omega} \cdot \vec{R} | A \rangle}{\omega_{IA}} \right|^2$$

$\omega \ll \omega_{IA}$

→ à basse énergie la section efficace de diffusion élastique est $\propto \omega^4$
 (il n'y a d'ailleurs pas de diffusion inélastique, si A est le fondamental, car les seuils ne sont pas ouverts)

Molécules ou atomes de gaz incolores : $\omega_{IA} >$ ultra violet ;
 la formule convient alors pour un rayonnement incident dans le visible ; cas de la lumière solaire dans l'atmosphère

→ ciel bleu (lumière observée par diffusion)
 soleil rouge (———— transmission, surtout soir et matin quand l'épaisseur d'atmosphère traversée est grande)

Cas d'un rayonnement incident non polarisé ; il faudrait sommer sur α les sections efficaces. On pourrait vérifier, comme en rayonnement classique que le rayonnement diffusé à 90° est polarisé rectiligne (la section efficace est nulle pour l'autre composante). C'était probablement le procédé de navigation des vikings (à l'aide de la cordillère) par soleil de minuit ou caché par des nuages lorsque bas sur l'horizon.

Processus supplémentaires dans l'atmosphère : réflexion, réfraction sur les gouttes et ~~nuages~~ poussières → lumière blanche (spectre \propto soleil), polarisation différente (réflexion, transmission), à la dispersion près (arc en ciel, rayon vert, ...)

ça ne suffit pas pour donner le bleu du ciel ; il faut aussi les fluctuations de densité ; sinon, diffusion cohérente et pics de Bragg !

Si il y a plusieurs électrons dans l'atome (ça arrive souvent), mettre $\sum_{i=1}^Z \vec{R}_i$ à la place de \vec{R} .

Diffusion élastique à haute énergie (Thomson)

mais pas trop haute quand même :

- $\lambda \gg r_{\text{atome}}$ pour la validité de l'approximation dipolaire
- il ne faut pas arriver dans le domaine de la diffusion Compton ($\lambda_c = 386 \text{ fm}$)
- il ne faut pas que l'électron devienne relativiste

Formule p.87, dans le cas $\hbar\omega \gg E_I - E_A \rightarrow$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega'} \sim r_0^2 \left(\vec{E}_{\vec{k}'}^{(\alpha')} \cdot \vec{E}_{\vec{k}}^{(\alpha)} \right)^2}$$

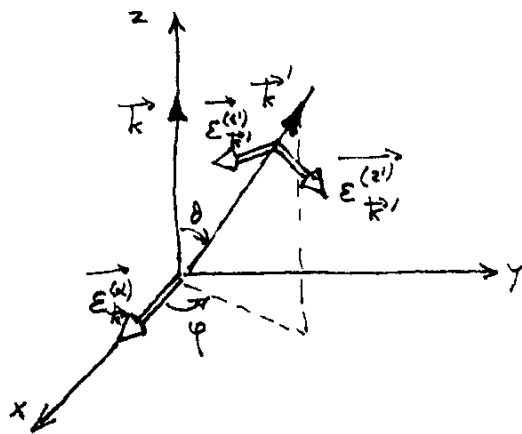
$\omega_{\text{at}} \ll \omega \ll \frac{c}{r_{\text{at}}}$

- indépendante de ω
- assez simple pour étudier la polarisation

On choisit :

$$\begin{cases} \hat{z} \parallel \vec{k} \\ \hat{x} \parallel \vec{E}_{\vec{k}}^{(\alpha)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\alpha')} = -\hat{\varphi} \\ \vec{E}_{\vec{k}'}^{(\alpha')} = \hat{\theta} \end{cases}$$



$$\vec{E}_{\vec{k}}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_{\vec{k}'}^{(\alpha')} = \begin{cases} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_{\vec{k}'}^{(\alpha')} = \begin{cases} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{cases}$$

Alors $\frac{d\sigma}{d\Omega'} = r_0^2 \begin{cases} \sin^2 \varphi & \text{pour } \alpha' = 1' \\ \cos^2 \theta \cos^2 \varphi & \text{pour } \alpha' = 2' \end{cases}$

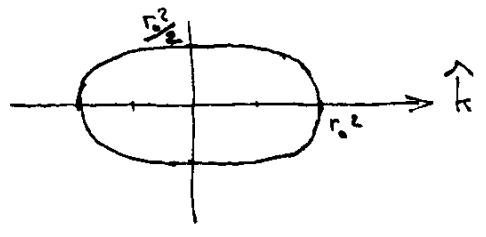
D'où la section efficace de diffusion dans la direction \vec{k}' si on ne détecte pas les polarisations :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = r_0^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi)$$

Dans le cas de photons incidents non polarisés (ou plutôt en nombre égal dans deux états de polarisation indépendants) il suffit de moyenner cette section efficace sur deux états de polarisation initiale indépendants (correspondants par exemple, pour \vec{k} ~~donnés~~ et \vec{k}' donnés, à $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

Distribution angulaire



symétrie de révolution / \hat{k} ;
 c'est la seule direction
 caractéristique du système
 qui subsiste .

Section efficace totale : $\sigma = \frac{r_0^2}{2} \int d\Omega' (1 + \cos^2 \theta) = \frac{r_0^2}{2} 4\pi (1 + \frac{1}{3})$

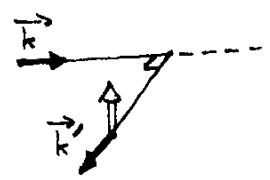
$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2$$

Cas où l'on détecte la polarisation finale, pour un faisceau incident non polarisé :

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{2} \sum_{\varphi \in \{0, \pi\}} r_0^2 \begin{cases} \sin^2 \varphi & \text{pour } 1' \\ \cos^2 \theta \cos^2 \varphi & \text{pour } 2' \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{r_0^2}{2} \begin{cases} 1 & \text{pour } 1', \text{ i.e. } \vec{E}_{\hat{k}'}^{(1)} \perp (\hat{k}, \hat{k}') \\ \cos^2 \theta & \text{pour } 2', \text{ i.e. } \vec{E}_{\hat{k}'}^{(1)} \in (\hat{k}, \hat{k}') \end{cases}$$

En particulier, pour la diffusion à 90° , $\theta = \frac{\pi}{2}$ et les seuls photons sortants sont polarisés $\perp (\hat{k}, \hat{k}')$



Remarques :

- on retrouve tous les résultats de l'électrodynamique classique. C'est une caractéristique de la théorie quantique du rayonnement que de ne pas être nécessaire (on peut pousser les calculs classiques jusqu'à l'émission spontanée, le moment magnétique anormal de l'électron, de...), mais elle est très utile par sa simplicité.

Rayonnement classique = théorie cohérente / co-errante

- quand ω grand, il faut pousser le développement multipolaire puis $\hbar\omega \gtrsim mc^2 \rightarrow$ nécessité de traiter l'électron à la Einstein

\rightarrow formule de Klein-Nishina pour $\frac{d\sigma}{d\Omega'}$, de la diffusion Compton (γ sur e^- libre)

- c'est une constante de la théorie quantique de l'électromagnétisme que de conspirer à redonner les résultats classiques :

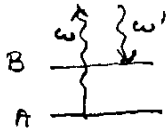
Rayleigh, Thomson, potentiel coulombien, section efficace de Rutherford, de ----

Effet Raman

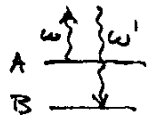
Notre formule de Kramers Heisenberg prévoit explicitement la possibilité de $A + \vec{k} \nu \rightarrow B + \vec{k}' \nu'$

et nous donne $\hbar \omega' = E_A + \hbar \omega - E_B$

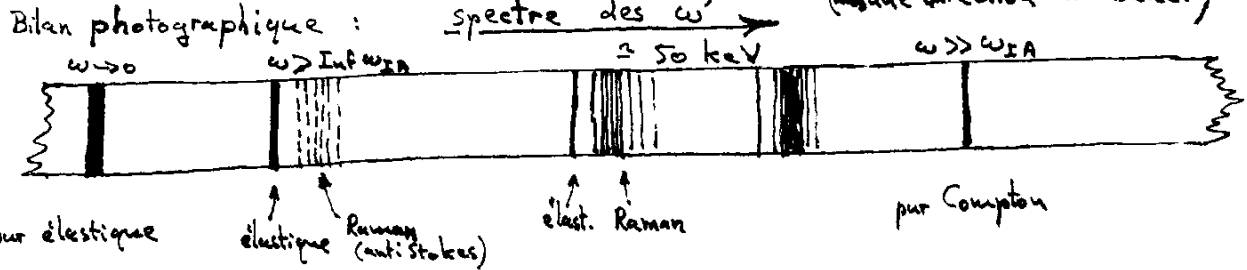
Effet effectivement observé par: Landsberg & Mandelstam (1928)
 sa débordait le cadre initial des hypothèses de l'atome de Bohr } Raman & Krishnan



→ raie ω' + rouge que celle du faisceau incident dite raie Stokes.



→ raie ω' + bleue, dite anti Stokes
 Parités: $\pi_I = -\pi_A, \pi_B = -\pi_I \rightarrow \pi_A = \pi_B$, soit la contraire de la résonance de fluorescence (dipol. électr. $\pi_A = \pi_B$) (dans une direction \vec{k} donnée)



+ des résonances pour certaines valeurs de ω

Limite de la formule de Kramers Heisenberg

Si ω prend une valeur telle qu'il existe un état I avec $E_I = E_A + \hbar \omega$.
 Dénominateur nul → section efficace infinie!

Vient de l'hypothèse de stationnarité des états I dans le calcul de perturbation: c'est faux (états métastables car couplés au champ électromagnétique du vide; émission spontanée) mais sans importance sauf dans ce cas.

Nécessite une analyse plus fine en tenant compte de la "largeur" du niveau (à la Weiskopf Wigner, cf. Heitler p. 196):

remplacer E_I par $E_I - i \frac{\Gamma_I}{2}$

→ section efficace grande (mais pas ∞) au passage par $\hbar \omega \approx E_I - E_A$ (et autrement les résultats précédents); c'est la résonance de fluorescence (cf. cours de physique atomique de maîtrise).

Références: Sakurai, Heitler, Baym

1.5