~~Union sportive~~
Université Scientifique
et Médicale de Grenoble
D.E.A. de physique nucléaire
et des particules
1981 - 82

Examen de Quantique des Champs

à remettre dans [13, 18] Septembre

Problème

– Calcul de la durée de vie partielle du boson intermédiaire pour le processus

$$W^- \longrightarrow e^- + \overline{\nu_e} \quad ,$$

dans le cadre du modèle standard de Weinberg et Salam, au premier ordre des perturbations.

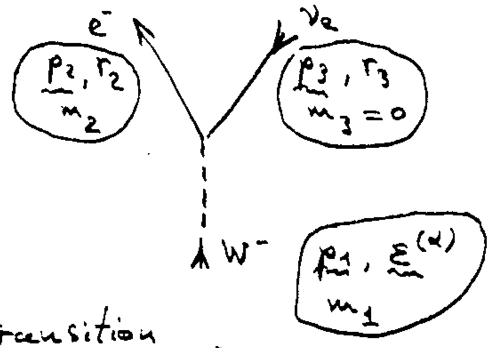
– Avant tout, pas d'affolement, les connaissances du modèle standard requises sont minimes ; et puis tu peux t'aider de toutes références ou conseils (l'usage est quand même de les citer), encore que le cours de cette année soit je pense suffisant. Je te demande simplement d'utiliser les conventions et notations du cours.

Suggestions

– Faire d'abord une simple estimation numérique de cette durée de vie, à base d'analyse dimensionnelle ("principe zéro de la physique").

puis procéder au calcul exact :

– Notations ⟶



– Calculer $S_{fi}^{(1)}$ et l'élément de matrice invariant correspondant $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$.

– Calculer $\sum_{\alpha, r_2, r_3} |\mathcal{M}_{fi}^{(1)}|^2$.

– Calculer le taux de transition Γ pour le processus (polarisations et $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ non observées) dans le repère propre du W^-.

– Calculer la durée de vie partielle du processus.

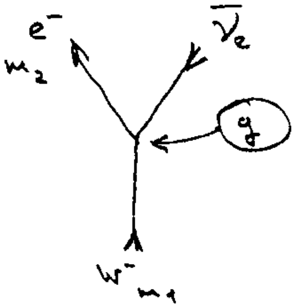
c'est fini, mais avec un tout petit effort supplémentaire tu peux estimer les rapports de branchement pour chacun des processus de désintégration du W^- prédits par le modèle standard, ainsi que la durée de vie du W^-.

Corrigé de l'examen Septembre 1982, durée de vie du W^-

Pour le processus $W^- \to e^- + \bar{\nu}_e$, la partie du lagrangien d'interaction du modèle standard qui contribue est (cours p. 348) :

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ j^{+\mu} W_\mu + j^\mu W^+_\mu \right\} + \&c \ldots$$

courants neutres, é.m., termes hadroniques ...



Processus du 1er ordre (1 vertex faible)

$\Rightarrow$ ~~probabilité~~ largeur $\Gamma \propto g^2$

$m_2 \ll m_1 \Rightarrow$ il ne reste (dans le c.m., W^- au repos) qu'un paramètre, la masse m_1 du W^- ;

Dimension + "principe zéro" $\Rightarrow \Gamma = g^2 m_1$

$g = \frac{|e|}{\sin\theta_w}$ (unification) $\Rightarrow \boxed{\Gamma = \alpha\, m_1}$

cte. de structure fin

$m_1 = 78$ GeV (cours p. 357)

$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{137} \times 78 = 0{,}5$ GeV

Durée de vie :

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{\hbar c}{c\Gamma} = \frac{197}{3 \times 10^8\, 10^{15}\, 0{,}5\, 10^3} = \frac{10^2}{10^{8+15+3}}$$

$\Rightarrow \boxed{\tau = 10^{-24}\ \text{s.}}$ en dépit de la faiblesse de l'interaction, la masse du W abrège considérablement ses jours ...

On peut maintenant attaquer le calcul "exact" :

$$j^\mu = \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}}_g \gamma^\mu t_- \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_g + \text{autres termes}$$

c'est ce terme qui contribue ici, pour détruire un neutrino (créer un anti) et créer un électron.

$$t_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j^\mu = \bar{e}_g \gamma^\mu \nu_{e_g} + \ldots$$

Deux projecteurs ne valent pas mieux qu'un :

$$j^\mu = \bar{e}\,\gamma^\mu\,\nu_{e_L} + \cdots$$
$$= \bar{e}\,\gamma^\mu\,\frac{1-\gamma^5}{2}\,\nu_e + \cdots$$

Il n'y a pas de terme dérivatif dans notre $\mathcal{L}_{int}$, donc

$$\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$$

Pour notre processus : $W^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e$

$\underset{\sim}{p_1}, \underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)} \qquad \underset{\sim}{p_2}, r_2 \qquad \underset{\sim}{p_3}, r_3$

au 1er ordre non nul :

$$S_{fi}^{(1)} = -i\int d^4\underset{\sim}{x}\, \langle 2,3|\,\mathcal{H}_{int.}(\underset{\sim}{x})\,|1\rangle$$
$$= -i\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\int d^4\underset{\sim}{x}\,\langle 2,3|\,\bar{e}(\underset{\sim}{x})\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu_e(\underset{\sim}{x})\,|0_{leptons}\rangle\langle 0_{Bosons}|W_\mu^+(\underset{\sim}{x})|1\rangle$$

cours, p. 345 : $W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_{1\mu}^+ + i\,W_{2\mu}^+\right)$, W_1 et W_2 champs réels

p. 151 $\Rightarrow$
$$W_\mu^+(\underset{\sim}{x}) = \sum_{\vec{k},\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}_{\vec{k}}\right)_\mu\left\{\frac{a_{1\vec{k}\alpha}+i a_{2\vec{k}\alpha}}{\sqrt{2}}\,e^{-i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}} + \frac{a^+_{1\vec{k}\alpha}+i a^+_{2\vec{k}\alpha}}{\sqrt{2}}\,e^{i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}}\right\}$$

3 états de polarisation α $\left\{\begin{array}{l}2 \text{ transv.}\\ 1 \text{ longit.}\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{lll}\mathcal{A}_{\vec{k}\alpha} \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_{1\vec{k}\alpha}+i\,a_{2\vec{k}\alpha}\right) & & \text{détruit un } W^- \\ \mathcal{B}^+_{\vec{k}\alpha} \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^+_{1\vec{k}\alpha}+i\,a^+_{2\vec{k}\alpha}\right) & & \text{crée un } W^+\end{array}\right.$$

p. 136 $\Rightarrow$

$$\nu_e(\underset{\sim}{x}) = \sum_{\vec{k},r}\sqrt{\frac{m_3}{\omega V}}\left\{b^\nu_{\vec{k}r}\,u^\nu_r(\vec{k})\,e^{-i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}} + d^{\nu +}_{\vec{k}r}\,v^\nu_r(\vec{k})\,e^{i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}}\right\}$$
$$\bar{e}(\underset{\sim}{x}) = \sum_{\vec{k},r}\sqrt{\frac{m_2}{\omega V}}\left\{b^{e+}_{\vec{k}r}\,\bar{u}^e_r(\vec{k})\,e^{i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}} + d^e_{\vec{k}r}\,\bar{v}^e_r(\vec{k})\,e^{-i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}}\right\}$$

Alors :

$$S_{fi}^{(1)} = -i\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\int d^4\underset{\sim}{x}\,\sqrt{\frac{m_2}{\omega_2 V}}\,\bar{u}^e_{r_2}(\vec{p}_2)\,e^{i\underset{\sim}{p_2}\cdot\underset{\sim}{x}}\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)\sqrt{\frac{m_3}{\omega_3 V}}\,v^\nu_{r_3}(\vec{p}_3)\,e^{i\underset{\sim}{p_3}\cdot\underset{\sim}{x}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}}\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}_{\vec{p}_1}\right)_\mu e^{-i\underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{x}}$$

$$= -i\,\frac{1}{\sqrt{\omega_2 V}}\frac{1}{\sqrt{\omega_3 V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}}\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\,\underbrace{\sqrt{m_2}\,\bar{u}^e_{r_2}(\vec{p}_2)}\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)\underbrace{\sqrt{m_3}\,v^\nu_{r_3}(\vec{p}_3)}\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}_{\vec{p}_1}\right)_\mu\,\underbrace{\int d^4\underset{\sim}{x}\,e^{i(\underset{\sim}{p_2}+\underset{\sim}{p_3}-\underset{\sim}{p_1})\cdot\underset{\sim}{x}}}_{(2\pi)^4\,\delta(\underset{\sim}{p_2}+\underset{\sim}{p_3}-\underset{\sim}{p_1})}$$

pour commodité ultérieure quand $m_3 = 0$
(cf. remarque 1) p. 288)

$$\boxed{S^{(1)}_{fi} = -i\,(2\pi)^4\,\delta(p_2 + p_3 - p_1)\,\frac{1}{\sqrt{\omega_2 V}}\,\frac{1}{\sqrt{\omega_3 V}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}}\quad \mathcal{M}_{fi}}$$

avec l'élément de matrice invariant pour ce processus :

$$\boxed{\mathcal{M}_{fi} \overset{df}{=} \frac{g}{2\sqrt{2}}\,\sqrt{m_2}\,\overline{u^e}(2)\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)\,\sqrt{m_3}\,v^\nu(3)\,(\varepsilon^{(\alpha)})_\mu}$$

On choisit des vecteurs de polarisation de base réels (pol. transv. et longit., pas circ.)

$$\mathcal{M}_{fi}^* = \frac{g}{2\sqrt{2}}\sqrt{m_3}\,v^{\nu+}(3)\,(1-\gamma^{5+})\,\gamma^{\nu+}\,\gamma^{0+}\sqrt{m_2}\,u^e(2)\,(\varepsilon^{(\alpha)})_\nu$$

dans notre représentation pour $[\gamma^\mu,\gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$:

p. 132 $\quad \gamma^0 = \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} = \gamma^{0+}$

$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \end{pmatrix} = -\vec{\gamma}^+$

p. 288 $\quad \gamma^5 \overset{df}{=} i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \Rightarrow [\gamma^5,\gamma^\mu]_+ = 0$

$$\gamma^{5+} = -i\gamma^{3+}\gamma^{2+}\gamma^{1+}\gamma^{0+} = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0$$
$$= -i\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^2 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$
$$= \gamma^5$$

d'ailleurs : $\quad \gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_2\\ -\sigma_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma_3\\ -\sigma_3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sigma_2\sigma_3 & \\ & -\sigma_2\sigma_3\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}\sigma_1 & \\ & \sigma_1\end{pmatrix}$

$$\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\begin{pmatrix} & \sigma_1\\ -\sigma_1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1 & \\ & \sigma_1\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} & \sigma_1^2\\ -\sigma_1^2 & \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1\\ -1 & \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$$

Tant et si bien que :

$$\mathcal{M}_{fi}^* = \frac{g}{2\sqrt{2}}\sqrt{m_3}\,v^{\nu+}(3)\,(1-\gamma^5)\,\gamma^0\gamma^\nu\sqrt{m_2}\,u^e(2)\,(\varepsilon^{(\alpha)})_\nu$$

$$= \frac{g}{2\sqrt{2}}\,\sqrt{m_3}\,\overline{v^\nu}(3)\,\gamma^\nu(1-\gamma^5)\,\sqrt{m_2}\,u^e(2)\,(\varepsilon^{(\alpha)})_\nu$$

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \mathcal{M}_{fi}\cdot\mathcal{M}_{fi}^*$$

$$= \frac{g^2}{8}\sqrt{m_2}\,\overline{u^e}(2)\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)\sqrt{m_3}\,v^\nu(3)\,\sqrt{m_3}\,\overline{v^\nu}(3)\,\gamma^\nu(1-\gamma^5)\sqrt{m_2}\,u^e(2)\quad(\varepsilon^{(\alpha)})_\mu(\varepsilon^{(\alpha)})_\nu$$

$$= \frac{g^2}{8}(\varepsilon^{(\alpha)})_\mu(\varepsilon^{(\alpha)})_\nu\ \mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu(1-\gamma^5)\,m_3\,v^\nu(3)\,\overline{v^\nu}(3)\,\gamma^\nu(1-\gamma^5)\,m_2\,u^e(2)\,\overline{u^e}(2)\right\}$$

(cf. p. 227, 228)

p.189 $\Longrightarrow$ $$\sum_{r_2} m_2\, u^e(2)\, \overline{u^e}(2) = \frac{\not{p}_2 + m_2}{2}$$

$$\sum_{r_3} m_3\, v^\nu(3)\, \overline{v^\nu}(3) = \frac{\not{p}_3 - m_3}{2} = \frac{\not{p}_3}{2}$$ pour le neutrino

$$\sum_{\alpha\, r_2 r_3} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g^2}{32} \sum_\alpha \left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}\right)_\mu \left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}\right)_\nu \mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_3\, \gamma^\nu(1-\gamma^5)(\not{p}_2+m_2)\right\}$$

On peut calculer $\sum_\alpha \left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}\right)_\mu \left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}\right)_\nu$ en prenant les composantes des $\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}$ dans un repère particulièrement adapté, i.e. axe $\hat{3}$ parallèle à $\vec{p}_1$. Ou, plus astucieusement, c'est un tenseur à 2 indices qui ne doit plus dépendre d'un $\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}$ puisque on a sommé dessus (faisceau non polarisé); les seuls tenseurs qui restent à notre disposition sont :

$$g_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad p_{1\mu}$$

avec lesquels on* ne peut faire autrement que :

$$\sum_\alpha \left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}\right)_\mu \left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}\right)_\nu = A\, g_{\mu\nu} + B\, p_{1\mu} p_{1\nu}$$

Produit par $g^{\mu\nu}$ (et $\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}^{(\beta)} = g^{\alpha\beta}$, p. 150) :

$$\sum_\alpha \underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)} = A\, g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} + B\, \underset{\sim}{p_1} \cdot \underset{\sim}{p_1}$$

$$-3 = 4A + m_1^2 B$$

Produit par $p_1^\mu p_1^\nu$ (et $\underset{\sim}{p_1} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}_{\vec{p}_1} = 0$, p. 150) :

$$\sum_\alpha \left(\underset{\sim}{p_1} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}\right)^2 = A\, \underset{\sim}{p_1} \cdot \underset{\sim}{p_1} + B\left(\underset{\sim}{p_1} \cdot \underset{\sim}{p_1}\right)^2$$

$$0 = A + m_1^2 B$$

$$\Longrightarrow \quad A = -1 \quad , \quad B = \frac{1}{m_1^2}$$

$$\sum_{\alpha \in \{1,2,3\}} \left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}_{\vec{p}_1}\right)_\mu \left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)}_{\vec{p}_1}\right)_\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{1}{m_1^2} p_{1\mu} p_{1\nu}$$

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not p_3\,\gamma^\nu(1-\gamma^5)(\not p_2+m_2)\right\}$$

$$=\mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not p_3\,\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not p_2\right\}+m_2\,\mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not p_3\,\gamma^\nu(1-\gamma^5)\right\}$$

$$=\mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu(1-\gamma^5)^2\not p_3\,\gamma^\nu\not p_2\right\}+m_2\,\mathrm{Tr}\left\{(1-\gamma^5)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not p_3\,\gamma^\nu\right\}$$

$$=\mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu\,2(1-\gamma^5)\not p_3\,\gamma^\nu\not p_2\right\}+m_2\,\mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu\underbrace{(1+\gamma^5)(1-\gamma^5)}_{=0}\not p_3\,\gamma^\nu\right\}$$

$$=2\left\{\underbrace{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\not p_3\,\gamma^\nu\not p_2\right]}_{\substack{\text{symétrique}\\ /\mu\leftrightarrow\nu}}-\underbrace{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma^5\not p_3\,\gamma^\nu\not p_2\right]}_{\substack{\text{antisymétrique}\\ /\mu\leftrightarrow\nu}}\right\}$$

La partie (anti)symétrique ~~multipliée par~~ contractée avec le terme bosonique $\sum_\alpha (\underline{\varepsilon}^{(\alpha)})_\mu (\underline{\varepsilon}^{(\alpha)})_\nu$ qui lui est symétrique, donne une contribution nulle. Reste :

$$\sum_{\alpha\, r_1 r_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2=\frac{g^2}{16}\left(-g_{\mu\nu}+\frac{1}{m_1^2}p_{1\mu}p_{1\nu}\right)\cancel{4}\,2\,\underbrace{\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\not p_3\,\gamma^\nu\not p_2\right)}$$

$$\hookrightarrow 4\left(p_3^\mu p_2^\nu+p_3^\nu p_2^\mu-\underline{p}_2\cdot\underline{p}_3\;g^{\mu\nu}\right)\qquad \text{(p. 226)}$$

$$=\frac{g^2}{4}\left(-2\,\underline{p}_3\cdot\underline{p}_2+\underline{p}_2\cdot\underline{p}_3\,\underbrace{g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}}_{=4}+\frac{2}{m_1^2}(\underline{p}_1\cdot\underline{p}_3)(\underline{p}_1\cdot\underline{p}_2)-\frac{1}{m_1^2}\,\underbrace{\underline{p}_1^{\,2}}_{m_1^2}(\underline{p}_2\cdot\underline{p}_3)\right)$$

$$\boxed{\sum_{\alpha\, r_1 r_2}|\mathcal{M}_{fi}|^2=\frac{g^2}{4}\left(\underline{p}_2\cdot\underline{p}_3+\frac{2}{m_1^2}(\underline{p}_1\cdot\underline{p}_2)(\underline{p}_1\cdot\underline{p}_3)\right)}$$

On peut continuer le calcul de $\sum_{\alpha r_2 r_3}|S_{fi}^{(1)}|^2$ avec cette forme pour $\sum|\mathcal{M}_{fi}|^2$, ou tout de suite la simplifier en remarquant qu'elle intervient en facteur d'un (et même deux !) $\delta(\underline{p}_2+\underline{p}_3-\underline{p}_1)$. Seules contribueront donc les valeurs telles que :

$$\underline{p}_2+\underline{p}_3=\underline{p}_1 \longrightarrow \underline{p}_2^{\,2}+2\,\underline{p}_2\cdot\underline{p}_3+\underline{p}_3^{\,2}=\underline{p}_1^{\,2}$$

$$m_2^2+2\,\underline{p}_2\cdot\underline{p}_3+0=m_1^2$$

$$\underline{p}_2\cdot\underline{p}_3=\frac{1}{2}\left(m_1^2-m_2^2\right)$$

ou encore :

$$\underset{\sim}{p_3} = \underset{\sim}{p_1} - \underset{\sim}{p_2} \longrightarrow \quad 0 = m_1^2 - 2\, \underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_2} + m_2^2$$

$$\underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_2} = \frac{1}{2}\left(m_1^2 + m_2^2\right)$$

$$\underset{\sim}{p_2} = \underset{\sim}{p_1} - \underset{\sim}{p_3} \longrightarrow \quad m_2^2 = m_1^2 - 2\, \underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_3} + 0$$

$$\underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_3} = \frac{1}{2}\left(m_1^2 - m_2^2\right)$$

Dans cette condition, on a :

$$\Sigma |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g^2}{4}\left[\frac{1}{2}(m_1^2 - m_2^2) + \frac{2}{m_1^2}\ \frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2)\ \frac{1}{2}(m_1^2-m_2^2)\right]$$

$$= \frac{g^2}{8}(m_1^2 - m_2^2)\left(1 + 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)$$

soit, en posant $r \stackrel{\text{df}}{=} \frac{m_2}{m_1}$:

$$\boxed{\Sigma |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g^2}{4}\, m_1^2\, (1 - r^2)\left(1 + \frac{r^2}{2}\right)}$$

Probabilité de transition dans le cas non polarisé :

$$dP = \frac{1}{3}\sum_{\alpha r_1 r_2} |S^{(1)}_{fi}|^2$$

$$= (2\pi)^4\, \delta(\underset{\sim}{p_2} + \underset{\sim}{p_3} - \underset{\sim}{p_1})\ \underbrace{\int d^4\underset{\sim}{x}\ e^{i(\underset{\sim}{p_2}+\underset{\sim}{p_3}-\underset{\sim}{p_1})\cdot\underset{\sim}{x}}}_{\sim VT}\ \frac{1}{V^3\,\omega_2\omega_3\, 2\omega_1}\ \frac{1}{3}\sum_{\alpha r_2 r_3} |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

$$= \frac{T}{6V^2}(2\pi)^4\, \delta(\underset{\sim}{p_2} + \underset{\sim}{p_3} - \underset{\sim}{p_1})\ \frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \Sigma |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

Au lieu de se limiter aux transitions à l'état final $\underset{\sim}{p_2}, \underset{\sim}{p_3}$, on s'intéresse à toutes les transitions finissant dans un pavé $d^3\vec{p_2}\ d^3\vec{p_3}$ autour de $\vec{p_2}, \vec{p_3}$. Leurs probabilités sont à peu près identiques et on obtient donc la probabilité du processus en multipliant par le nombre d'états finals dignes d'intérêt, soit le nombre de modes :

$$\frac{d^3\vec{p_2}}{(2\pi/L)^3}\ \frac{d^3\vec{p_3}}{(2\pi/L)^3} = \frac{V^2}{(2\pi)^6}\ d^3\vec{p_2}\ d^3\vec{p_3}$$

Proba de transition dans le pavé :

$$dP = \frac{T}{6(2\pi)^2} \sum |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3} \delta(p_2 + p_3 - p_1)\, d^3\vec{p_2}\, d^3\vec{p_3}$$

Il est inutile de mesurer $\vec{p_3}$ (d'autant plus que ce n'est pas facile, dans le cas d'un neutrino !) car le $\delta(p_2+p_3-p_1)$ nous assure de sa valeur. La probabilité pour tous les $\vec{p_3}$ finals (étant entendu qu'un seul contribue) est donc :

$$dP = \frac{T}{6(2\pi)^2} \sum |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3} \delta(\omega_2+\omega_3-\omega_1)\, d^3\vec{p_2}$$

avec maintenant : $\vec{p_3} = \vec{p_1} - \vec{p_2}$

et donc $\omega_3 = \sqrt{\vec{p_3}^2 + m_3^2} = |\vec{p_3}| = |\vec{p_1} - \vec{p_2}|$

C'est le taux de désintégration du W^- (dans la voie $e^- \bar{\nu}_e$) qui nous intéresse ; on ne mesure rien de l'électron sortant, et on additionne les probabilités de tous les processus.
Il faut donc calculer :

$$I \stackrel{df}{=} \int d^2\hat{p}_2 \int dp_2\, p_2^2 \frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3} \delta(\omega_2+\omega_3-\omega_1)$$

Intégrale sur p_2 :

$$J \stackrel{df}{=} \int dp_2 \frac{p_2^2}{\omega_1\omega_2\omega_3} \delta(\omega_2+\omega_3-\omega_1) = \int d\omega_2 \frac{dp_2}{d\omega_2} \frac{p_2^2}{\omega_1\omega_2\omega_3} \delta(\omega_2+\omega_3-\omega_1)$$

$$\begin{cases} \omega_2^2 = p_2^2 + m_2^2 \\ 2\omega_2\, d\omega_2 = 2p_2\, dp_2 \end{cases} \longrightarrow \frac{dp_2}{d\omega_2} = \frac{\omega_2}{p_2}$$

$$= \int d\omega_2 \frac{p_2}{\omega_1\omega_3} \delta(\omega_2+\omega_3-\omega_1)$$

Il nous faut enfin bien finir par choisir un repère. On veut la durée de vie intrinsèque du W^- ; on se place donc dans le repère propre du W^- ($\vec{p_1} = 0$), dit aussi repère du centre de masse.

Dans ce repère $\vec{p_1} = 0 \longrightarrow$ $\omega_3 = |\vec{p_2}| = \sqrt{\omega_2^2 - m_2^2}$
$\omega_1 = m_1$

$$J = \frac{1}{m_1} \int d\omega_2 \ \delta(\omega_2 + \omega_3 - m_1)$$

attention : ω_3 dépend de ω_2 !

$$E_f \stackrel{df}{=} \omega_2 + \omega_3 = \omega_2 + \sqrt{\omega_2^2 - m_2^2}$$

$$\longrightarrow \quad J = \frac{1}{m_1} \int dE_f \ \frac{d\omega_2}{dE_f} \ \delta(E_f - m_1)$$

$$= \frac{1}{m_1} \left(\frac{d\omega_2}{dE_f} \right)_{E_f = m_1}$$

$$dE_f = d\omega_2 + \frac{\omega_2 \, d\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 - m_2^2}} = \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_3}\right) d\omega_2$$

$$\frac{d\omega_2}{dE_f} = \frac{\omega_3}{\omega_3 + \omega_2}$$

$$\left(\frac{d\omega_2}{dE_f}\right)_{E_f = m_1} = \frac{m_1 - \omega_2}{m_1} = 1 - \frac{\omega_2}{m_1}$$

et $\quad \omega_3 = \sqrt{\omega_2^2 - m_2^2} = m_1 - \omega_2$

$$\longrightarrow \quad \omega_2^2 - m_2^2 = m_1^2 - 2 m_1 \omega_2 + \omega_2^2$$

$$\omega_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2 m_1}$$

$$\frac{\omega_2}{m_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + r^2\right)$$

$$\left(\frac{d\omega_2}{dE_f}\right)_{E_f = m_1} = \frac{1}{2}\left(1 - r^2\right)$$

$$J = \frac{1}{2 m_1}\left(1 - r^2\right)$$

indépendante de la direction $\vec{p_2}$, comme il se devait dans le système du centre de masse où il n'y a plus aucune direction privilégiée pouvant servir de référence.

Intégration angulaire :

$$\longrightarrow \quad I = \frac{4\pi}{2 m_1}\left(1 - r^2\right)$$

Probabilité de désintégration :

$$P = \frac{T}{6(2\pi)^2} \; \frac{g^2}{4} m_1^2 (1-r^2)\left(1+\frac{r^2}{2}\right) \; \frac{4\pi}{2m_1} (1-r^2)$$

$$= T \; \frac{1}{48\pi} g^2 m_1 \; (1-r^2)^2 \left(1+\frac{r^2}{2}\right)$$

Largeur : $\Gamma = \dfrac{P}{T}$

$$\boxed{\Gamma = \frac{1}{48\pi} \; g^2 m_1 \; (1-r^2)^2 \left(1+\frac{r^2}{2}\right)}$$

~~[illegible]~~

$r = \dfrac{m_2}{m_1}$ électron / boson W^- $\qquad m_2 = 0{,}511$ Mev, $\quad m_1 = 78{,}1$ Gev

$r = 6{,}5 \; 10^{-6}$ c'est pas gros $\longrightarrow \Gamma \simeq \dfrac{1}{48\pi} g^2 m_1$

$g^2 = \dfrac{e^2}{\sin^2\theta_w} = 4\pi \dfrac{\alpha}{\sin^2\theta_w} \longrightarrow \Gamma = \dfrac{1}{12 \sin^2\theta_w} \; \alpha \; m_1$

$\sin^2\theta_w = 0{,}228 \longrightarrow$ notre estimation initiale par le "principe zéro" n'était trop forte que par un facteur 2,5 !!

$$\Gamma_{e^-\bar{\nu}_e} = \frac{1}{12 \times 0{,}228} \; \frac{1}{137} \; 78{,}1 = 0{,}21 \text{ Gev}$$

$$\tau_{e^-\bar{\nu}_e} = \frac{1}{\Gamma_{e^-\bar{\nu}_e}} = \frac{\hbar c}{c\,\Gamma} = \frac{197}{3\times10^8 \times 10^{15} \times 210}$$

$$\boxed{\tau_{e^-\bar{\nu}_e} = 3{,}1 \; 10^{-24} \text{ s}}$$

Les modes de désintégration du W^- prédits par le modèle standard avec 3 saveurs de leptons, 3 saveurs de quarks et 3 couleurs sont :

$W^- \longrightarrow$

e^-	$\bar{\nu}_e$	1 mode
μ^-	$\bar{\nu}_\mu$	"
τ^-	$\bar{\nu}_\tau$	"
d	$\bar{u}$	3 modes (1 dans chaque couleur)
s	$\bar{c}$	"
b	$\bar{t}$	"

En négligeant les masses des leptons et quarks en regard de la masse $M_W = 78$ GeV, chacun de ses modes à la même probabilité et il y a en tout :

$$3 + 3 \times 3 = 12 \text{ modes}$$

D'où les rapports de branchement :

1/12	pour chacun des modes leptoniques
3/12	pour chacun des modes hadroniques (singulets de couleurs)

la largeur totale du W^- :

$$\Gamma = 12 \; \Gamma_{e^-\bar{\nu}_e} = 12 \times 0{,}21 = 2{,}5 \text{ GeV}$$

et la durée de vie du W^- :

$$\tau = \frac{1}{12} \tau_{e^-\bar{\nu}_e} = \frac{3{,}1 \; 10^{-24}}{12} \longrightarrow \boxed{\tau = 2{,}6 \; 10^{-25} \text{ s}}$$