

U.S.M.G.
D.E.A. $\varphi\nu$
1987–88

EXAMEN DE THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

à remettre le Samedi 23 janvier avant 18 heure,
à Alain Laverne, 24, rue Lafayette, tél. 76 44 78 53.

Vous pouvez étudier ce problème individuellement ou en équipe, comme vous l'entendez. Je vous demande une rédaction personnelle de la solution, et me réserve le droit de solliciter oralement tout éclaircissement. Indiquez les noms de vos collaborateurs, et donnez scrupuleusement les références des sources éventuellement utilisées.

Le G.O.

Diffusion élastique électron-électron

Section efficace

On se propose d'analyser la diffusion élastique de deux électrons de l'état initial de modes 1 et 2 (pour \mathbf{p}_1, s_1 et \mathbf{p}_2, s_2) à l'état final de modes 3 et 4 (pour \mathbf{p}_3, s_3 et \mathbf{p}_4, s_4).

1—Dessinez les deux graphes contribuant à l'ordre le plus bas.

2—Donnez les expressions des contributions de ces graphes à l'élément de matrice invariant $-i\mathcal{M}$.

3—Quelle est l'expression de la section efficace de diffusion dans les pavés $d^3\mathbf{p}_3, d^3\mathbf{p}_4$, en fonction de $|\mathcal{M}|^2$?

4—Par quelle quantité A^2 faut-il remplacer $|\mathcal{M}|^2$ lorsque les détecteurs sont indifférents au mode de polarisation, et le faisceau et la cible sont non polarisés.

5—Calculez la section efficace différentielle $d\sigma/d^2\hat{\mathbf{p}}_3$ correspondante (en fonction de A^2) lorsque l'électron 2 est (théoriquement!) au repos.

Limite non relativiste

On revient sur le calcul de l'élément de matrice invariant.

6—Commencez par régresser à la décomposition de l'hamiltonien d'interaction de l'électrodynamique quantique en un terme d'interaction coulombienne et un terme d'interaction avec le champ électromagnétique transverse, et rappelez les expressions des éléments de matrices invariants direct et d'échange correspondant à chacun de ces termes.

7—Rappelez l'expression du système linéaire dont un bispineur $u(\mathbf{p})$ est solution dans la représentation de Dirac.

8—On décompose les bispineurs de base cherchés en deux spineurs à deux composantes:

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u_g(\mathbf{p}) \\ u_p(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Quelle est l'expression de $u_p(\mathbf{p})$ en fonction de $u_g(\mathbf{p})$?

En déduire les expressions des éléments de matrice invariants précédents en fonction des spineurs $u_{g s_i}(\mathbf{p}_i)$ et de leurs conjugués $u_{g s_i}^+(\mathbf{p}_i)$.

9—Déterminez les expressions de ces éléments de matrice invariants dans la limite "non-relativiste" ($|\mathbf{p}_i| \ll m$), en fonction des impulsions \mathbf{p}_i , de la constante g , de la masse m , des matrices de Pauli et des spineurs (du même) $|s_i\rangle \propto u_{g s_i}(\mathbf{p}_i)$, normés à l'unité ($\langle s_i | s_i \rangle = 1$).

Quelle est l'origine de la contribution dominante?

Un potentiel d'interaction électron-électron

Retournons toujours plus en arrière, jusqu'à la description quantique traditionnelle des particules (*modèle du quanton*).

10—Un système quantique a pour hamiltonien $H = H_0 + V$. L'hamiltonien H_0 est conservatif, et on en considère deux états stationnaires $|i\rangle$ et $|f\rangle$, d'énergies E_i et E_f . Calculez l'élément de matrice S_{fi} au premier ordre de perturbation en V , en fonction de l'élément de matrice $\langle f|V|i\rangle$.

11—Une physicienne ordinaire (ou tout au moins maîtresse en physique) s'intéresse à la diffusion à basse énergie de deux quantons a et b , sans spin, interagissant par le potentiel V . Le quanton a passe de l'impulsion \mathbf{p}_1 à l'impulsion \mathbf{p}_3 et le quanton b de \mathbf{p}_2 à \mathbf{p}_4 . Quelle expression notre physicienne ingénue (elle ne connaît rien de la théorie quantique des champs) va trouver pour l'élément de matrice de transition $\langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 | V | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle$ en fonction de la représentative $V(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ de V dans l'espace des positions \mathbf{r}_a et \mathbf{r}_b des deux quantons? (Remarques: (i) $|12\rangle$ signifie le produit direct $|1\rangle_a |2\rangle_b$ des vecteurs d'état des quantons a et b , et $\langle 12|$ son conjugué; (ii) l'ingénue utilise des fonctions propres de l'impulsion d'un quanton normées à 1 dans la sempiternelle grosse boîte de volume \mathcal{V} .)

Donnez la même expression en fonction des variables

$$\begin{cases} \mathbf{R} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_b) \\ \mathbf{r} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b \end{cases}$$

et de $V(\mathbf{R}, \mathbf{r})$.

Il est empiriquement avéré que, dans la mesure où les quantons sont initialement et finalement libres, l'on n'observe jamais que des processus pour lesquels $\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. A quelle condition $V(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ assure-t-il cette conservation? Quelle est alors l'expression de $\langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 | V | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle$? Quelles sont les seules valeurs de $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$ qui y contribuent?

12—Ecrire l'expression correspondante de $\langle \mathbf{p}_3 s_3 \mathbf{p}_4 s_4 | V | \mathbf{p}_1 s_1 \mathbf{p}_2 s_2 \rangle$, pour deux quantons de spin $\frac{1}{2}$. (Le ket d'état $|\mathbf{p}s\rangle$ pour un quanton signifie le produit direct $|\mathbf{p}\rangle|s\rangle$ où $|s\rangle$ est un ket de l'espace des états de spin du quanton.)

13—Les deux quantons de spin $\frac{1}{2}$ sont maintenant identiques. Notre physicienne (qui a des principes), n'envisage plus, comme états réalisables pour son système que des kets de la forme

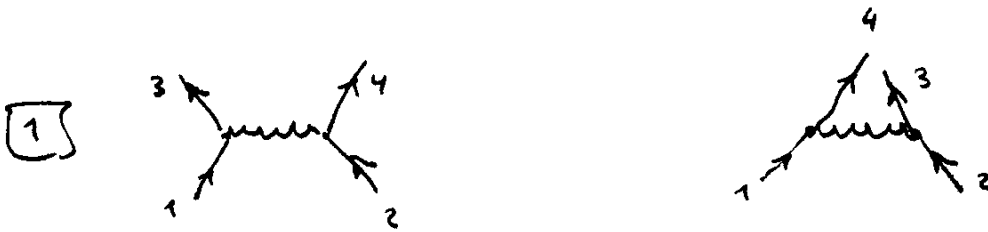
$$|\widehat{12}\rangle \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_a |2\rangle_b - |2\rangle_a |1\rangle_b).$$

Exprimez les éléments de matrice de transitions réalisables $\langle \widehat{34} | V | \widehat{12} \rangle$ en fonction des éléments de matrice sur les états de base $\langle 34 | V | 12 \rangle$ et $\langle 34 | V | 21 \rangle$.

Donnez l'expression de l'élément de matrice de transition $\langle \mathbf{p}_3 s_3 \mathbf{p}_4 s_4 | V | \mathbf{p}_1 s_1 \mathbf{p}_2 s_2 \rangle$ en fonction de la représentative de V dans l'espace des positions.

14—En identifiant l'élément de matrice S ainsi estimé avec celui trouvé pour le même processus (et également au premier ordre de perturbation non nul) dans la limite non-relativiste de l'électrodynamique quantique, déterminez le potentiel d'interaction de deux électrons, sous forme d'opérateur $V(\mathbf{r})$ dans l'espace des états de spin.

Corrigé de l'examen
de théorie quantique des champs



[2]
$$-iM = \bar{u}_3 (-iq\gamma^\mu) u_1 \frac{-i \cancel{p}_\mu}{k^2} \bar{u}_4 (-iq\gamma^\nu) u_2 - (3 \leftrightarrow 4)$$

avec
 $k = p_1 - p_2 = p_4 - p_3$

$k = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$

[3]
$$d\Omega = \frac{1}{2^4} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{v_{rel}} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \delta^4(p_f - p_i) \frac{1}{\omega_3 \omega_4} |M|^2 d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4$$

[4]
$$|M|^2 \rightarrow A^2 \cong \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |M|^2$$

[5]
$$\frac{d\Omega}{d^2\vec{p}_3} = \frac{1}{2^4} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{v_{rel}} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \frac{d\omega_3}{dE_f} \frac{p_3}{\omega_4} A^2$$

systeme :
$$\begin{cases} \vec{p}_2 = 0, \omega_2 = m \\ v_{rel} = |\vec{v}_1| = \frac{p_1}{\omega_1} \end{cases}$$

$$\frac{d\Omega}{d^2\vec{p}_3} = \frac{1}{2^4} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{p_3}{p_1 m \omega_4} \frac{d\omega_3}{dE_f} A^2$$

$$E_f = \omega_3 + \omega_4$$

$$\frac{dE_f}{d\omega_3} = 1 + \frac{d\omega_4}{d\omega_3}$$

$$\omega_4 = \sqrt{p_4^2 + m^2} = \sqrt{(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 + m^2} = \sqrt{p_1^2 + \omega_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \vartheta}$$

$$\frac{d\omega_4}{d\omega_3} = \frac{\omega_3 - p_1 \cos \vartheta \frac{dp_3}{d\omega_3}}{\omega_4} = \frac{\omega_3 - p_1 \cos \vartheta \frac{\omega_3}{p_3}}{\omega_4}$$

$$\frac{dE_f}{d\omega_3} = 1 + \frac{\omega_3}{\omega_4} \left(1 - \frac{p_1}{p_3} \cos \vartheta\right)$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d^2\hat{p}_3} = \frac{1}{24} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{p_3}{m p_1 \left[\omega_4 + \omega_3 \left(1 - \frac{p_1}{p_3} \cos \vartheta\right)\right]} A^2}$$

ou encore, sous une forme plus élégante (due à Laurent Deruaux) :

$$\begin{aligned} -2p_1 p_3 \cos \vartheta &= \omega_4^2 - p_1^2 - \omega_3^2 \\ &= (\omega_1 + m - \omega_3)^2 - (\omega_1^2 - m^2) - \omega_3^2 \\ &= 2(m + \omega_1)(m - \omega_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_f}{d\omega_3} &= \frac{1}{\omega_4} \left(\omega_4 + \omega_3 + \frac{\omega_3}{p_3^2} (m + \omega_1)(m - \omega_3) \right) \\ &= \frac{m}{\omega_4} \frac{\omega_1 + m}{\omega_3 + m} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d^2\hat{p}_3} = \frac{1}{24} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{m^2} \frac{p_3}{p_1} \frac{\omega_3 + m}{\omega_1 + m} A^2}$$

... l'élégance qui cache des dessous compliqués :
l'expérimentatrice se donne l'énergie du faisceau, soit p_1 (ou ω_1), et la position du détecteur, soit ϑ ; reste à calculer (ce qui est toujours compliqué) le p_3 (et ω_3) correspondant en résolvant

$$\begin{cases} \vec{p}_4 = \vec{p}_1 - \vec{p}_3 & \rightarrow \text{de...} \\ \omega_4 = \omega_1 + m - \omega_3 \end{cases}$$

6 Cours \rightarrow contributions directes :

$$-i M_{dir}^{(Coul)} = -i \frac{g^2}{k^2} (u_4^+ u_2) (u_3^+ u_1)$$

$$-i M_{dir}^{(A_T)} = -i g^2 \frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{k^2} (\bar{u}_4 \gamma^i u_2) (\bar{u}_3 \gamma^j u_1)$$

$$k = p_1 - p_3$$

7 $(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) u(\vec{p}) e^{-i p_\mu x^\mu} = 0$

$$\Rightarrow (\gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m) u(\vec{p}) = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) u(\vec{p}) = p_0 u(\vec{p})$$

avec $\begin{cases} \vec{\alpha} \hat{=} \gamma^0 \vec{\gamma} \\ \beta \hat{=} \gamma^0 \end{cases}$; en repr. de Dirac $\begin{cases} \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \\ \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m - p_0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m - p_0 \end{pmatrix} u(\vec{p}) = 0$$

solutions si $p_0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$; $\omega \hat{=} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

ici, électrons \rightarrow solutions $p_0 = \omega$.

8

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} u_g(\vec{p}) \\ u_p(\vec{p}) \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{u_p(\vec{p}) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\omega + m} u_g(\vec{p})}$$

Remarque : dans la limite des hautes vitesses, $\omega \rightarrow m$, $\vec{p} \sim m \vec{v} \Rightarrow u_p(\vec{p})$ est d'ordre v (sur c) par rapport à $u_g(\vec{p})$. C'est la propre de la représentation de Dirac de ~~se présenter~~ ^{manifeste} deux grandes composantes et deux petites composantes dans la limite des hautes vitesses.

$$-i M_{dir}^{(coul.)} = -i \frac{q^2}{k^2} \left[u_{\beta 4}^+ \left(1 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{\omega_4 + m} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2}{\omega_2 + m} \right) u_{\beta 2} \right] \left[u_{\beta 3}^+ \left(1 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2}{\omega_3 + m} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{\omega_1 + m} \right) u_{\beta 1} \right]$$

$$-i M_{dir}^{(\vec{A}_T)} = -i q^2 \frac{\delta_{ij} - k_i k_j}{k^2 m} \left[u_{\beta 4}^+ \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{\omega_4 + m} + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2}{\omega_2 + m} \right) u_{\beta 2} \right] \left[u_{\beta 3}^+ \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2}{\omega_3 + m} + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{\omega_1 + m} \right) u_{\beta 1} \right]$$

3) Limite des hautes vitesses:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_i + m \rightarrow 2m \\ \frac{\vec{p}_i}{m} \sim \vec{v} \end{array} \right.$$

A l'ordre le plus bas on reste que la contribution coulombienne:

$$-i M \sim -i \frac{q^2}{k^2} (u_{\beta 4}^+ u_{\beta 2}) (u_{\beta 3}^+ u_{\beta 1}) - \text{sch.}$$

Normalisation? Facile de vérifier avec les spinors explicitement donnés en cours que

$$u_{\beta}^+(\vec{p}) u_{\beta}(\vec{p}) = \omega + m \rightarrow 2m$$

$$\rightarrow u_{\beta}(\vec{p}) \sim \sqrt{2m} |s_i\rangle$$

$$-i M \sim -i 4m^2 \frac{q^2}{k^2} \langle s_3 s_4 | s_1 s_2 \rangle - \text{sch.}$$

$$\sim \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3}{m^2}$$

10

$$H = H_0 + V$$

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f | V^{(I)}(t) | i \rangle + \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots$$

avec (représentation d'interaction):

$$V^{(I)}(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$$

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_f - E_i)t} \langle f | V | i \rangle + \dots$$

Si V indépendant du temps:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i (2\pi) \delta(E_f - E_i) \langle f | V | i \rangle + \dots$$

$$\boxed{11} \quad \langle \vec{r}' | \vec{p} \rangle = \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}'}}{\sqrt{V}} \quad \text{normée à 1 dans } V$$

Si V local:

$$\langle \vec{p}_3 \vec{p}_4 | V | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle = \frac{1}{V^2} \int d^3\vec{r}_a d^3\vec{r}_b e^{-i(\vec{p}_3 \cdot \vec{r}_a + \vec{p}_4 \cdot \vec{r}_b)} V(\vec{r}_a, \vec{r}_b) e^{i(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_a + \vec{p}_2 \cdot \vec{r}_b)}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_a = \vec{R} + \frac{\vec{r}}{2} \\ \vec{r}_b = \vec{R} - \frac{\vec{r}}{2} \end{cases}$$

Jacobien = 1

$$\rightarrow \vec{p}_1 \cdot \vec{r}_a + \vec{p}_2 \cdot \vec{r}_b = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \cdot \vec{R} + (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \frac{\vec{r}}{2}$$

$$\langle \vec{p}_3 \vec{p}_4 | V | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle = \frac{1}{V^2} \int d^3\vec{r} d^3\vec{R} e^{i(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \cdot \vec{R} + i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 + \vec{p}_4) \cdot \frac{\vec{r}}{2}} V(\vec{R}, \vec{r})$$

Conservation de l'impulsion \Rightarrow nul si $\vec{p}_3 + \vec{p}_4 \neq \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

\Rightarrow fonction δ

assurée par l'exponentielle à condition que V soit indep. de \vec{R}

Alors:

$$\langle \vec{p}_3 \vec{p}_4 | V | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{1}{V^2} \int d^3\vec{r} e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \cdot \vec{r}} V(\vec{r})$$

\rightarrow puisque contributions seulement si $\vec{p}_4 - \vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \vec{p}_3$

$\boxed{12}$

$$\langle \vec{p}_3 s_3 \vec{p}_4 s_4 | V | \vec{p}_1 s_1 \vec{p}_2 s_2 \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{1}{V^2} \int d^3\vec{r} e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \cdot \vec{r}} \langle s_3 s_4 | V(\vec{r}) | s_1 s_2 \rangle$$

$$\boxed{13} \quad \langle \widetilde{34} | V | \widetilde{12} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \langle 34 | V | 12 \rangle - \langle 34 | V | 21 \rangle + \langle 43 | V | 21 \rangle - \langle 43 | V | 12 \rangle \right\}$$

particules indiscernables; le résultat ne dépend pas de la façon de les nommer (quelle que soit la statistique, $V(a,b) = V(b,a) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle 43 | V | 21 \rangle &= \langle 4 | \langle 3 | V_{ab} | 2 \rangle_a | 1 \rangle_b \\ &= \langle 4 | \langle 3 | V_{ba} | 2 \rangle_b | 1 \rangle_a \\ &= \langle 3 | \langle 4 | V_{ab} | 1 \rangle_a | 2 \rangle_b \\ &= \langle 34 | V | 12 \rangle \quad \&c... \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \widetilde{34} | V | \widetilde{12} \rangle = \langle 34 | V | 12 \rangle - \langle 43 | V | 12 \rangle$$

$$\begin{aligned} &\langle \vec{p}_3 s_3 \vec{p}_4 s_4 | V | \vec{p}_1 s_1 \vec{p}_2 s_2 \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{1}{V^2} \left\{ \int d^3\vec{r} e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \cdot \vec{r}} \langle s_3 s_4 | V(\vec{r}) | s_1 s_2 \rangle - \text{éch. } (3 \leftrightarrow 4) \right\} \end{aligned}$$

$\boxed{14}$ Ici :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_2) \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{1}{V^2} \dots \\ &\dots \left\{ \int d^3\vec{r} e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \cdot \vec{r}} \langle s_3 s_4 | V(\vec{r}) | s_1 s_2 \rangle - \text{éch. } (3 \leftrightarrow 4) \right\} \end{aligned}$$

Tandis qu'en électrodynamique quantique :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4\left(\frac{p_3 + p_4}{\hbar} - \frac{p_1 + p_2}{\hbar}\right) \frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_2 V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_3 V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_4 V}} \mathcal{M}$$

$$\underset{\substack{\text{densité} \\ \text{limite des} \\ \text{basses vitesses}}}{\sim} \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4\left(\frac{p_3 + p_4}{\hbar} - \frac{p_1 + p_2}{\hbar}\right) \frac{1}{4m^2 V^2} \left\{ \frac{4m^2 g^2}{(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2} \langle s_3 s_4 | s_1 s_2 \rangle - \text{éch.} \right\}$$

Identification :

$$\int d^3\vec{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) = \frac{q^2}{k^2}$$

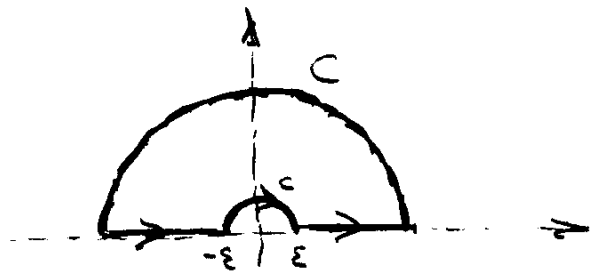
$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{q^2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2}$$

$$= \frac{q^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d(-\cos\theta) e^{ikr(-\cos\theta)}$$

$$= \frac{q^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} = \frac{q^2}{(2\pi)^2 ir} \left\{ \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr}}{k} - \int_0^{-\infty} d(-k) \frac{e^{i(-k)r}}{-k} \right\}$$

$$= \frac{q^2}{(2\pi)^2 ir} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr}}{k}$$

$$= - \int_C dz \frac{e^{iz}}{z}$$



$$\begin{cases} z = \varepsilon e^{i\theta} \\ dz = i\varepsilon d\theta \end{cases} \Rightarrow = \int_0^\pi d\theta i e^{i\varepsilon e^{i\theta}} \rightarrow i \int_0^\pi d\theta = i\pi$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{q^2}{4\pi r}}$$

alleluia!
gloria in excelsis Colombo!

Aux ordres suivants en $\frac{\vec{p}}{m}$, on retrouverait les termes dépendants du spin : Breit (contact), spin-spin (Larmor-Thomas). C'est compliqué, je n'ai pas fait le calcul (demander à Bertrand Delamotte)