Paris 7
D.E.A. $\varphi\nu$
1990–91

THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Examen, jeudi 10 janvier 1991, 9 heures

Ce problème traite d'un processus simple que l'électrodynamique quantique prétend décrire, et de l'éventuelle réfutation de celle-ci dans des limites ("non-relativistes", plus ou moins quantiques) où l'on savait déjà, avec plus ou moins d'arbitraire, décrire ce processus. Ce problème pourrait donc présenter un certain intérêt pour celles et ceux que les questions de limites de l'électrodynamique quantique tracassent, et que ne rebutent pas quelques calculs avec les bi-spineurs et matrices de Dirac.

Le ton injonctif de cet énoncé n'est que la trace de l'impuissance de son rédacteur à vous suggérer de façon plus douce un itinéraire permettant de parvenir au but. Il va sans dire que vous avez toute liberté de choisir votre propre cheminement. Le correcteur, quant à lui, implore votre miséricorde pour que vous respectiez les quelques notations proposées.

Vous pouvez travailler selon vos goûts, seul(e) ou accompagné(e). Ce dernier mode aurait il votre préférence que vous devrez quand même rédiger personnellement et clairement (durée impartie oblige) une solution, en gardant à l'esprit que l'erreur devient inadmissible dans un travail de groupe. Songez que des lectures répétées de la même erreur, mot pour mot, peuvent finir par réveiller la férocité du correcteur le plus assoupi. Quoi qu'il en soit, vous aurez sans doute intérêt à échanger vos sentiments avec un(e) condisciple ayant choisi l'autre sujet du même rédacteur. Enfin, l'usage veut encore que l'on cite avec précision les diverses sources d'information mises à contribution (livre, article, conversation de couloir, confidences, *etc.*)

Le fruit de vos efforts est à remettre à Alain Laverne*, Bertrand Delamotte† ou Alain Comtet, avant le samedi 12, 18 heures. Bon courage

A.L.

DIFFUSION ELECTRON-MUON

On se propose d'analyser la diffusion d'un électron (masse m) et d'un muon (masse M) dans le cadre de l'électrodynamique quantique, puis d'en déduire un potentiel effectif d'interaction électromagnétique entre un électron "non-relativiste" et un noyau.

1. Dessiner le graphe et donner l'expression de l'élément de matrice invariant $-i\mathcal{M}$ contribuant à l'ordre le plus bas au processus

$$\underset{\mathbf{p}_1, r_1}{e^-} + \underset{\mathbf{p}_2, r_2}{\mu^-} \to \underset{\mathbf{p}_3, r_3}{e^-} + \underset{\mathbf{p}_4, r_4}{\mu^-} .$$

2. On envoie N_e électrons sur N_μ muons dans les modes précédents. Quel est le nombre moyen dévénements $(\mathbf{p}_3, r_3)$, $(\mathbf{p}_4, r_4)$, détectés dans les pavés $d^3\mathbf{p}_3$, $d^3\mathbf{p}_4$? Quelle est la section efficace correspondante,

$$d^6\sigma_{(\mathbf{p}_1,r_1)+(\mathbf{p}_2,r_2)\to(\mathbf{p}_3,d^3\mathbf{p}_3,r_3)+(\mathbf{p}_4,d^3\mathbf{p}_4,r_4)},$$

* 158, rue Saint Jacques, Paris V$^{\text{ème}}$, tél. 43 29 09 02.
† Tapez 11 DELAMOTTE.

en fonction de l'élément de matrice $\mathcal{M}_{(\mathbf{p}_1,r_1)+(\mathbf{p}_2,r_2)\to(\mathbf{p}_3,r_3)+(\mathbf{p}_4,r_4)}$?

Diffusion "non-polarisée"

3. Les détecteurs de l'expérience précédente acceptent indifféremment tous les modes de polarisation. Quel est alors le nombre moyen d'événements ? En déduire l'expression de la section efficace correspondante,

$$d^6\sigma_{(\mathbf{p}_1,r_1)+(\mathbf{p}_2,r_2)\to(\mathbf{p}_3,d^3\mathbf{p}_3)+(\mathbf{p}_4,d^3\mathbf{p}_4)}.$$

4. On fait quatre expériences successives, chacune avec N_e et N_μ particules, respectivement dans les modes $(r_1, r_2) = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$. Quel est, en moyenne, le nombre total d'événements ? En déduire l'expression de la section efficace correspondante,

$$d^6\sigma_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2\to(\mathbf{p}_3,d^3\mathbf{p}_3)+(\mathbf{p}_4,d^3\mathbf{p}_4)}.$$

5. En déduire l'expression de la quantité A^2 par laquelle il suffit de remplacer $|\mathcal{M}|^2$ dans l'expression de la section efficace "polarisée" pour obtenir la section efficace "non-polarisée".

6. Calculer, en fonction de A^2, la section efficace de diffusion d'un électron non polarisé sur un muon *au repos* non polarisé, dans l'angle solide $d^2\hat{\mathbf{p}}_3$.

7. Montrer que A^2 peut se mettre sous la forme

$$A^2 = \frac{e^4}{4\underline{k}^4} T^{\mu\nu}(1,3)T_{\mu\nu}(2,4),$$

en fonction de la quadri-impulsion de transfert $\underline{k} \stackrel{\text{df}}{=} \underline{p}_1 - \underline{p}_3$ et d'un tenseur $T^{\mu\nu}$ à définir.

8. Montrer que le tenseur $T^{\mu\nu}(1,3)$ peut s'écrire comme une trace de produits d'opérateurs particulièrement simples si l'on se souvient de l'expression de la matrice $\sum_{r=1}^{2} u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p})$.

9. Calcul de $T^{\mu\nu}(1,3)$:

i) Comparer $\mathrm{Tr}(AB)$ et $\mathrm{Tr}(BA)$.

ii) Calculer $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)$.

iii) Calculer $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu) = \mathrm{Tr}\left((\gamma^5)^2\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\right) = ?$.

iv) Calculer $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta)$.

v) En déduire l'expression de $T^{\mu\nu}(1,3)$ en fonction de m, $\eta^{\mu\nu}$ et des composantes de $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_3$.

10. En déduire l'expression de la quantité $T^{\mu\nu}(1,3)T_{\mu\nu}(2,4)$ en fonction des quadri-impulsions $\underline{p}_1$, $\underline{p}_2$, $\underline{p}_3$, $\underline{p}_4$, et des masses m et M.

11. Supposons les caractéristiques de la réaction données dans le repère prétendu "du centre de masse". Calculer les produits scalaires de $\underline{p}_1$, $\underline{p}_2$, $\underline{p}_3$, $\underline{p}_4$, en fonctions de ω_1, ω_2, $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_3$.

12. En déduire l'expression de A^2 en fonction de e, m, M, $\varepsilon \stackrel{\text{df}}{=} m/M$, $x \stackrel{\text{df}}{=} |\mathbf{p}_1|/m$ et θ l'angle de diffusion entre les impulsions $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_3$.

13. Quelle est la valeur limite de A^2 lorsque $\varepsilon \ll 1$? Quelles sont les valeurs limites des vitesses initiale et finale du muon dans cette approximation ?

14. En déduire la valeur de la section efficace différentielle "non-polarisée" $d^2\sigma/d^2\hat{\mathbf{p}}_3$ de diffusion d'électrons sur des muons *au repos*, dans l'approximation $M \gg m$.

15. En déduire la valeur de la section efficace différentielle de diffusion d'une charge électrique ze, masse m, sur une charge Ze, masse $M \gg m$, au repos.

i) Ce résultat dépend-il des signes des charges en présence ?

ii) Que devient cette section efficace lorsque la charge incidente a une faible (combien ?) vitesse ?

iii) Ce dernier résultat ne vous inspire-t-il pas quelques fines remarques sur les heureux hasards de l'histoire ?

Potentiel effectif électron-noyau

On revient au problème initial de la diffusion électron-muon "polarisés", dans le repère dit "du centre de masse".

16. Calculer $\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}$ en fonction de ω_1 et ω_2, puis en fonction de m, M, ε et x.

17. En se plaçant dans la *représentation de Dirac*, et en utilisant la décomposition

$$u_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\omega(\mathbf{p}) + m} \begin{pmatrix} |r\rangle \\ |\varphi_r(\mathbf{p})\rangle \end{pmatrix}$$

pour les bi-spineurs de base, calculer $u^+_{r_3}(\mathbf{p}_3)\, u_{r_1}(\mathbf{p}_1)$ et $U^+_{r_4}(\mathbf{p}_4)\, U_{r_2}(\mathbf{p}_2)$ en fonctions des spineurs à deux composantes $|r_1\rangle$, $|r_2\rangle$, $|r_3\rangle$, $|r_4\rangle$, des impulsions $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_3$, et des quantités $\omega_1 + m$ et $\omega_2 + M$. (Si besoin est, appelez à l'aide un(e) comparse qui a choisi de traiter le sujet *Diffusion électron-électron*.)

18. Evaluer de la même façon les quantités $\bar{u}_{r_3}(\mathbf{p}_3)\, \boldsymbol{\gamma}\, u_{r_1}(\mathbf{p}_1)$ et $\bar{U}_{r_4}(\mathbf{p}_4)\, \boldsymbol{\gamma}\, U_{r_2}(\mathbf{p}_2)$.

19. Evaluer les produits

$$\left(u^+_{r_3}(\mathbf{p}_3)\, u_{r_1}(\mathbf{p}_1)\right) \left(U^+_{r_4}(\mathbf{p}_4)\, U_{r_2}(\mathbf{p}_2)\right)$$

et

$$\left(\bar{u}_{r_3}(\mathbf{p}_3)\, \boldsymbol{\gamma}\, u_{r_1}(\mathbf{p}_1)\right) \cdot \left(\bar{U}_{r_4}(\mathbf{p}_4)\, \boldsymbol{\gamma}\, U_{r_2}(\mathbf{p}_2)\right),$$

en fonctions des spineurs à deux composantes, des masses m et M, de ε et de x, et des directions $\hat{\mathbf{p}}_1$ et $\hat{\mathbf{p}}_3$.

20. En déduire l'expression approchée de

$$\left(\bar{u}_{r_3}(\mathbf{p}_3)\, \underline{\boldsymbol{\gamma}}\, u_{r_1}(\mathbf{p}_1)\right) \cdot \left(\bar{U}_{r_4}(\mathbf{p}_4)\, \underline{\boldsymbol{\gamma}}\, U_{r_2}(\mathbf{p}_2)\right),$$

dans la limite "non relativiste" $|\mathbf{p}_1| \ll m$, "sans recul" $M \gg m$, en ne gardant que le terme dominant dans chacune des contributions indépendante de $\boldsymbol{\sigma}$ et dépendante de $\boldsymbol{\sigma}$ respectivement.

21. En déduire la valeur de $\mathcal{M}/4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}$ dans cette approximation, en fonction des spineurs à deux composantes, de e, m, $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}$.

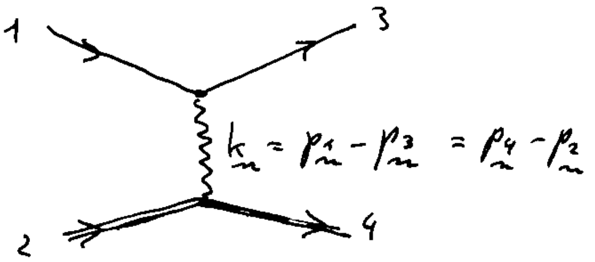
22. Solliciter de votre comparse (encore) favori(te) la formule exprimant le potentiel effectif en fonction de la limite non relativiste de l'élément de matrice invariant — vous avez quand même le droit d'exiger de comprendre d'où vient cette formule — et calculer la représentative $\langle r_1\, r_2|V(\mathbf{r})|r_1\, r_2\rangle$ de ce potentiel.

23. En déduire le potentiel effectif d'un électron "non relativiste" dans l'environnement du noyau numéro Z, sous forme d'opérateur $V(\mathbf{r})$ agissant dans l'espace des états du spin $\mathbf{S}$ de l'électron.

Examen 10 janvier 1991

Corrigé : $\boxed{\text{Diffusion électron-muon}}$

①



$$-i\mathcal{M}_{fi} = \left[\bar u_3\,(-iq\gamma^\mu)\,u_1\right]\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2}\left[\bar U_4\,(-iq\gamma^\nu)\,U_2\right]$$

avec $q = -|e|$ (charge des particules)

$$\boxed{-i\mathcal{M}_{fi} = i\,\frac{q^2}{k^2}\,(\bar u_3\,\gamma\,u_1)\cdot(\bar U_4\,\gamma\,U_2)}$$

$k = p_1 - p_3$

---

②

$$|S_{fi}|^2 = \left[(2\pi)^4\,\delta^4(p_f - p_i)\right]^2 \frac{1}{2\omega_1 V\,2\omega_2 V\,2\omega_3 V\,2\omega_4 V}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2$$

$$= \frac{(2\pi)^4}{2^4}\,\frac{T}{V^3}\,\delta^4(p_f - p_i)\,\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2$$

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix}\vec p_1\, r_1 \to \vec p_3\, r_3\, d^3\vec p_3\\ \vec p_2\, r_2 \to \vec p_4\, r_4\, d^3\vec p_4\end{pmatrix} = |S_{fi}|^2\,\frac{d^3\vec p_3}{\frac{(2\pi)^3}{V}}\,\frac{d^3\vec p_4}{\frac{(2\pi)^3}{V}}$$

$$= \frac{1}{2^4}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{T}{V}\,\delta^4(p_f - p_i)\,\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2\,d^3\vec p_3\,d^3\vec p_4$$

$$V = S\,v_{rel}\,T$$

T : durée ; v_{rel} : "vitesse relative" ; S : section faisceau $\cap$ cible

N_{e^-} expériences sur 1 muon + loi binomiale :

$$\Rightarrow\quad d^6\bar n_{\text{évén}^{\text{ts}}} = \frac{N_{e^-}}{S}\,\underbrace{\frac{1}{2^4}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{v_{rel}}\,\delta^4(p_f - p_i)\,\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2\,d^3\vec p_3\,d^3\vec p_4}$$

$$\boxed{d^6\sigma_{(\cdots\ \cdots)} = \frac{1}{2^4}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{v_{rel}}\,\delta^4(p_f - p_i)\,\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2\,d^3\vec p_3\,d^3\vec p_4}$$

(3) $$d^6 \bar{n}_{ev.} = \sum_{r_3 r_4} d^6 \bar{n}_{ev.}\left(\ldots \to \begin{smallmatrix} r_3 \\ r_4 \end{smallmatrix}\right)$$
$$= \frac{N_{e^-}}{\mathcal{S}} \sum_{r_3 r_4} d^6\sigma\left(\ldots \to \begin{smallmatrix} r_3 \\ r_4 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\boxed{d^6\sigma = \frac{1}{2^4}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{v_{rel}}\delta^4(p_f - p_i)\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}\sum_{r_3 r_4}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \, d^3\vec{p}_3 \, d^3\vec{p}_4}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} \vec{p}_1, r_1 \\ \vec{p}_2, r_2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} \vec{p}_3, d^3\vec{p}_3 \\ \vec{p}_4, d^3\vec{p}_4 \end{smallmatrix}\right)$$

---

(4) $$d^6 \bar{n}_{ev.} = \sum_{r_1 r_2} d^6 \bar{n}_{ev.}\left(\begin{smallmatrix} \vec{p}_1 & r_1 \\ \vec{p}_2 & r_2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} \vec{p}_3, d^3\vec{p}_3 \\ \vec{p}_4, d^3\vec{p}_4 \end{smallmatrix}\right)$$
$$= \frac{N_e N_\mu}{\mathcal{S}} \sum_{r_1 r_2} d^6\sigma\left(\begin{smallmatrix} \cdot & r_1 \\ \cdot & r_2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right)$$

Equivalent à faire 1 expérience en envoyant :

N_e électrons $r_1 = 1$ \
et N_e électrons $r_1 = 2$ } $2N_e$ électrons en tout

sur :

N_μ muons $r_2 = 1$ \
et N_μ muons $r_2 = 2$ } $2N_\mu$ muons en tout

$\Rightarrow$ écrire plutôt :

$$d^6 \bar{n}_{ev} = \frac{(2N_e)(2N_\mu)}{\mathcal{S}} \underbrace{\frac{1}{4}\sum_{r_1 r_2} d^6\sigma\left(\begin{smallmatrix} \cdot & r_1 \\ \cdot & r_2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right)}_{\text{sect. efficace (par définition)}}$$

$$\boxed{d^6\sigma\left(\begin{smallmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} \vec{p}_3, d^3\vec{p}_3 \\ \vec{p}_4, d^3\vec{p}_4 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2^4}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{v_{rel}}\delta^4(p_f - p_i)\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}\frac{1}{4}\sum_{\substack{r_1 r_2 \\ r_3 r_4}}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \, d^3\vec{p}_3 \, d^3\vec{p}_4}$$

---

(5) $$|\mathcal{M}_{fi}|^2 \longrightarrow \boxed{A^2 = \frac{1}{4}\sum_{r_1 r_2 r_3 r_4}|\mathcal{M}_{fi}|^2}$$

---

(6) Muon au repos : $\vec{p}_2 = 0$, $\omega_2 = M$, $v_{rel} = \dfrac{|\vec{p}_1|}{\omega_1}$

$$d^3\sigma\left(\vec{p}_1, \vec{p}_2 \to \vec{p}_3, d^3\vec{p}_3\right) = \frac{1}{2^4}\frac{1}{(2\pi)^2}\delta(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - M)\frac{1}{M|\vec{p}_1|\omega_3\omega_4} A^2 \, d^3\vec{p}_3$$

avec $\vec{p}_4 = \vec{p}_1 - \vec{p}_3$, $\omega_4 = \sqrt{\vec{p}_4^{\,2} + M^2}$

$$d^3\vec{p_3} = |\vec{p_3}|^2 \, d|\vec{p_3}| \, d^2\hat{p_3}$$

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\hat{p_3}} = \frac{1}{2^4}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{M|\vec{p_1}|}\int d|\vec{p_3}| \, \vec{p_3}^2 \, \delta(\omega_3+\omega_4-\omega_1-M)\frac{A^2}{\omega_3\omega_4}$$

$$= \frac{1}{2^4}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{M|\vec{p_1}|}\frac{d|\vec{p_3}|}{d(\omega_3+\omega_4)} A^2 \frac{\vec{p_3}^2}{\omega_3\omega_4}$$

pour $\omega_3+\omega_4 = \omega_1 + M$

$$\vec{p_3}^2 + m^2 = \omega_3^2 \Rightarrow |\vec{p_3}| \, d|\vec{p_3}| = \omega_3 \, d\omega_3$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega_3}{d|\vec{p_3}|} = \dfrac{|\vec{p_3}|}{\omega_3} \\[2ex] \dfrac{d\omega_4}{d|\vec{p_3}|} = \dfrac{d}{d|\vec{p_3}|}\sqrt{(\vec{p_1}-\vec{p_3})^2+M^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{}}\dfrac{d(\vec{p_1}-\vec{p_3})^2}{d|\vec{p_3}|} \\[2ex] \qquad \left\{ (\vec{p_1}-\vec{p_3})^2 = \vec{p_1}^2 - 2|\vec{p_1}||\vec{p_3}|\cos\vartheta + \vec{p_3}^2 \right. \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{2\omega_4}\left(-2|\vec{p_1}|\cos\vartheta + 2|\vec{p_3}|\right) = \dfrac{|\vec{p_3}| - |\vec{p_1}|\cos\vartheta}{\omega_4} \end{cases}$$

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\hat{p_3}} = \frac{1}{2^4}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{M|\vec{p_1}|}\frac{1}{\dfrac{|\vec{p_3}|}{\omega_3} + \dfrac{|\vec{p_3}|-|\vec{p_1}|\cos\vartheta}{\omega_4}} A^2 \frac{\vec{p_3}^2}{\omega_3\omega_4}$$

$$\boxed{\frac{d^2\sigma}{d^2\hat{p_3}} = \frac{1}{2^4}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{M|\vec{p_1}|}\frac{\vec{p_3}^2}{\omega_4|\vec{p_3}| + \omega_3\left(|\vec{p_3}|-|\vec{p_1}|\cos\vartheta\right)} A^2}$$

---

7 $\mathcal{M}_{fi} = -\frac{q^2}{\underset{\sim}{k}^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu u_1)\cdot(\bar{U}_4\gamma_\mu U_2)$

$$(\bar{u}_3\gamma^\mu u_1)^* = u_1^+(\gamma^\mu)^+(\gamma^0)^+ u_3$$

$$\begin{cases} (\gamma^0)^+ = \gamma^0 \\ (\gamma^i)^+\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i \end{cases}$$

$$= \bar{u}_1\gamma^\mu u_3$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{fi}^* = -\frac{q^2}{\underset{\sim}{k}^2}(\bar{u}_1\gamma^\nu u_3)(\bar{U}_2\gamma_\nu U_4)$$

$$A^2 = \frac{g^4}{4\,\underset{\sim}{k}^4}\; T^{\mu\nu}(1,3)\; T_{\mu\nu}(2,4) \qquad \underset{\sim}{k} \triangleq \underset{\sim}{p_1} - \underset{\sim}{p_3}$$

avec
$$\boxed{T^{\mu\nu}(1,3) \triangleq \sum_{r_1 r_3} \underbrace{(\bar{u}_3\, \gamma^\mu u_1)}_{4\text{-vecteur}} \underbrace{(\bar{u}_1\, \gamma^\nu u_3)}_{4\text{ vecteur}}}$$ tenseur

et
$$T_{\mu\nu}(2,4) = \sum_{r_2 r_4} (\bar{U}_4\, \gamma_\mu U_2)(\bar{U}_2\, \gamma_\nu U_4)$$

---

(8)
$$T^{\mu\nu}(1,3) = \sum_{r_1 r_3} \sum_{\substack{\alpha\beta\\\gamma\delta}} (\bar{u}_3)_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_1)_\beta\, (\bar{u}_1)_\gamma (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} (u_3)_\delta$$

$$= \sum_{r_1 r_3} \sum_\delta \sum_{\alpha\beta\gamma} (u_3)_\delta (\bar{u}_3)_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_1)_\beta (\bar{u}_1)_\gamma (\gamma^\nu)_{\gamma\delta}$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{ \sum_{r_3} (u_3\, \bar{u}_3)\, \gamma^\mu \sum_{r_1} (u_1 \bar{u}_1)\, \gamma^\nu \right\}$$

$$\boxed{T^{\mu\nu}(1,3) = \mathrm{Tr}\left\{ (\not{p}_3 + m)\gamma^\mu (\not{p}_1 + m)\gamma^\nu \right\}}$$

---

(9)
i) $\mathrm{Tr}(AB) = A_{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} = B_{\beta\alpha} A_{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}(BA)$

ii) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\, \eta^{\mu\nu}$

iii) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu) = 0$

iv) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta) = 4\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)$

voir n'importe quelle bonne référence.

v)
$$T^{\mu\nu}(1,3) = \mathrm{Tr}(\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu) + m^2\, \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

$$= 4\left(p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - \eta^{\mu\nu}\, \underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_3}\right) + 4 m^2 \eta^{\mu\nu}$$

$$\boxed{T^{\mu\nu}(1,3) = 2^2 \left\{ p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu + (m^2 - \underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_3})\, \eta^{\mu\nu} \right\}}$$

et $T_{\mu\nu}(2,4) = 2^2 \left\{ p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} + (M^2 - \underset{\sim}{p_2}\cdot\underset{\sim}{p_4})\, \eta_{\mu\nu} \right\}$

---

(10)
$$T^{\mu\nu}(1,3)\, T_{\mu\nu}(2,4) = 2^4 \Big\{ 2(\underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_2})(\underset{\sim}{p_3}\cdot\underset{\sim}{p_4}) + 2(\underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_4})(\underset{\sim}{p_2}\cdot\underset{\sim}{p_3})$$
$$+ 2(\underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_3})(M^2 - \underset{\sim}{p_2}\cdot\underset{\sim}{p_4}) + 2(\underset{\sim}{p_2}\cdot\underset{\sim}{p_4})(m^2 - \underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_3})$$
$$+ 4(m^2 - \underset{\sim}{p_1}\cdot\underset{\sim}{p_3})(M^2 - \underset{\sim}{p_2}\cdot\underset{\sim}{p_4}) \Big\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T^{\mu\nu}(1,3)\, T_{\mu\nu}(2,4) = 2^5 \Big\{ & (\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)(\underline{p}_3 \cdot \underline{p}_4) + (\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_4)(\underline{p}_3 \cdot \underline{p}_2) \\ & - M^2\, \underline{p}_1 \cdot \underline{p}_3 - m^2\, \underline{p}_2 \cdot \underline{p}_4 + 2 m^2 M^2 \Big\} \end{aligned}}$$

---

(11) $$A^2 = \frac{q^4}{2^2\, \underline{k}^4}\, T^{\mu\nu}(1,3)\, T_{\mu\nu}(2,4)$$ Scalaire

$\Rightarrow$ on peut l'évaluer dans n'importe quel repère (inertiel)
Par exemple, dans le repère dit "du centre de masse" (parce que la notion de centre de masse n'a pas de sens en relativité einsteinienne), à savoir :

$$\vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 = \vec{p}\,'_3 + \vec{p}\,'_4 = 0$$

(j'aurais dû introduire ces notations dans l'énoncé. Pas grave !)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{p}\,'_2 = -\vec{p}\,'_1 \\ \vec{p}\,'_4 = -\vec{p}\,'_3 \end{cases}$$

$$\omega'_1 + \omega'_2 = \omega'_3 + \omega'_4 \Rightarrow \sqrt{\vec{p}\,'^2_2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}\,'^2_1 + M^2} = \sqrt{\vec{p}\,'^2_3 + m^2} + \sqrt{\vec{p}\,'^2_3 + M^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\vec{p}\,'_3| = |\vec{p}\,'_1| \\ \omega'_3 = \omega'_1 \\ \omega'_4 = \omega'_2 \end{cases}$$

$$\underline{p}'_1 \cdot \underline{p}'_2 = \omega'_1 \omega'_2 + \vec{p}\,'^2_1$$
$$\underline{p}'_3 \cdot \underline{p}'_4 = \omega'_3 \omega'_4 + \vec{p}\,'^2_3 = \underline{p}'_1 \cdot \underline{p}'_2$$
$$\underline{p}'_1 \cdot \underline{p}'_4 = \omega'_1 \omega'_4 - \vec{p}\,'_1 \cdot \vec{p}\,'_4 = \omega'_1 \omega'_2 + \vec{p}\,'_1 \cdot \vec{p}\,'_3$$
$$\underline{p}'_3 \cdot \underline{p}'_2 = \omega'_3 \omega'_2 - \vec{p}\,'_3 \cdot \vec{p}\,'_2 = \underline{p}'_1 \cdot \underline{p}'_4$$
$$\underline{p}'_1 \cdot \underline{p}'_3 = \omega'^2_1 - \vec{p}\,'_1 \cdot \vec{p}\,'_3$$
$$\underline{p}'_2 \cdot \underline{p}'_4 = \omega'^2_2 - \vec{p}\,'_1 \cdot \vec{p}\,'_3$$

---

(12) Toujours dans le système "du centre de masse" : $\begin{cases} x' \hat{=} \dfrac{|\vec{p}\,'_1|}{m} \\ \varepsilon \hat{=} \dfrac{m}{M} \end{cases}$

$$\omega'_1 = \sqrt{m^2 + \vec{p}\,'^2_1} = m\sqrt{1 + x'^2}$$
$$\omega'_2 = \sqrt{M^2 + \vec{p}\,'^2_1} = M\sqrt{1 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{\vec{p}\,'^2_1}{m^2}} = M\sqrt{1 + \varepsilon^2 x'^2}$$
$$\vec{p}\,'^2_1 = m^2 x'^2 = m M\, \varepsilon x'^2$$
$$\vec{p}\,'_1 \cdot \vec{p}\,'_3 = \vec{p}\,'^2_1 \cos\vartheta = m^2 x'^2 \cos\vartheta' = M^2 \varepsilon^2 x'^2 \cos\vartheta'$$

$$\omega_1'^2 = m^2 (1+x'^2)$$
$$\omega_2'^2 = M^2 (1+\varepsilon^2 x'^2)$$
$$(\underset{\sim}{p}_1' \cdot \underset{\sim}{p}_2')^2 = m^2 M^2 \left(\sqrt{1+x'^2}\sqrt{1+\varepsilon^2 x'^2} + \varepsilon\, x'^2\right)^2$$
$$(\underset{\sim}{p}_1' \cdot \underset{\sim}{p}_4')^2 = m^2 M^2 \left(\sqrt{1+x'^2}\sqrt{1+\varepsilon^2 x'^2} + \varepsilon\, x'^2 \cos\vartheta'\right)^2$$
$$M^2\, \underset{\sim}{p}_1' \cdot \underset{\sim}{p}_3' = m^2 M^2 \left(1+x'^2 - x'^2 \cos\vartheta'\right)$$
$$m^2\, \underset{\sim}{p}_2' \cdot \underset{\sim}{p}_4' = m^2 M^2 \left(1+\varepsilon^2 x'^2 - \varepsilon^2 x'^2 \cos\vartheta'\right)$$

et enfin :

$$\underset{\sim}{k}'^2 = (\underset{\sim}{p}_1' - \underset{\sim}{p}_3')^2 = -(\vec{p}_1\,' - \vec{p}_3\,')^2 = -\left(2\,\vec{p}_1\,'^2 - 2\,\vec{p}_1\,'\cdot\vec{p}_3\,'\right)$$
$$= -2m^2 \left(x'^2 - x'^2 \cos\vartheta'\right) = -4\, m^2\, x'^2 \sin^2\frac{\vartheta'}{2}$$
$$\underset{\sim}{k}'^4 = 2^4\, m^4\, x'^4 \sin^4\frac{\vartheta'}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A^2 = \frac{1}{2}\, q^4\, \frac{M^2}{m^2}\, \frac{1}{x'^4 \sin^4\frac{\vartheta'}{2}} \Big\{ & \left(\sqrt{1+x'^2}\sqrt{1+\varepsilon^2 x'^2} + \varepsilon x'^2\right)^2 \\ & + \left(\sqrt{1+x'^2}\sqrt{1+\varepsilon^2 x'^2} + \varepsilon x'^2 \cos\vartheta'\right)^2 \\ & - \left(1+x'^2 - x'^2\cos\vartheta'\right) \\ & - \left(1+\varepsilon^2 x'^2 - \varepsilon^2 x'^2 \cos\vartheta'\right) \quad +2 \Big\} \end{aligned}}$$

13

$$A^2 \underset{\varepsilon \ll 1}{\sim} \frac{1}{2}\, q^4\, \frac{M^2}{m^2}\, \frac{1}{x'^4 \sin^4\frac{\vartheta'}{2}} \left\{ (1+x'^2) + (1+x'^2) - (1+x'^2 - x'^2\cos\vartheta') - 1 + 2 \right\}$$
$$\text{- - - - - - - - - -} \left\{ 2 + x'^2 + x'^2 \cos\vartheta' \right\}$$
$$\text{- - -} \left\{ 2 + x'^2 (1+\cos\vartheta') \right\}$$
$$\text{- - -}\ 2 \left\{ 1 + x'^2 \cos^2\frac{\vartheta'}{2} \right\}$$

$$\boxed{A^2 \underset{\varepsilon \ll 1}{\sim} q^4\, \frac{M^2}{m^2}\, \frac{1 + x'^2 \cos^2\frac{\vartheta'}{2}}{x'^4 \sin^4\frac{\vartheta'}{2}}}$$

$$v_2' = \frac{|\vec{p}_2\,'|}{\omega_2'} = \frac{|\vec{p}_1\,'|}{M\sqrt{1+\varepsilon^2 x'^2}} = \frac{\varepsilon\, x}{\sqrt{1+\varepsilon^2 x'^2}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$|\vec{p}_4\,'| = |\vec{p}_1\,'|$ et $\omega_4' = \omega_2' \Rightarrow v_4' = v_2' \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

C'est une approximation dite "sans recul" et $v_2' = 0$
$\Rightarrow$ le labo ($v_2 = 0$) est aussi le système "du centre de masse".

(14) On reprend la formule trouvée à la question (6), avec dans l'approximation sans recul ($\varepsilon \ll 1$) :

$$\vec{p}_3^{\,2} = \vec{p}_1^{\,2} \quad , \quad \omega_4 = M \quad , \quad \omega_3 = \omega_1 = m\sqrt{1+x'^2} = M\,\varepsilon\sqrt{1+x'^2}$$

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\hat{p}_3} = \frac{1}{2^4}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{M}\,\frac{1}{M\left(1+\varepsilon\sqrt{1+x^2}\,(1-\cos\vartheta)\right)}\,A^2$$

$$= \frac{1}{2^4}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{M^2}\,q^4\,\frac{M^2}{m^2}\,\frac{1+x^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{x^4\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

Doucteux, il doit y avoir une erreur ! Dans la littérature on trouve plutôt $\left(1-x^2+x^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)$?

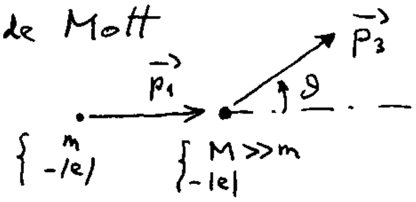
Soit, avec $q = -|e|$:

$$\boxed{\frac{d^2\sigma}{d^2\hat{p}_3} = \left(\frac{e^2/4\pi}{2mx^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\right)^2\left(1+x^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

dimension : $\left[\frac{1}{m^2}\right] = L^{-2}$ bon !

= diffusion de Mott

pour



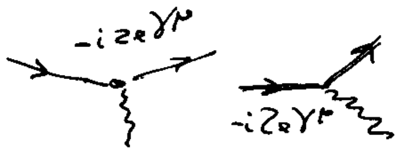
avec $\frac{e^2}{4\pi} = \alpha$

$x = \frac{|\vec{p}_1|}{m}$

---

(15) On modélise les 2 charges par des champs de fermions élémentaires ($\Leftrightarrow$ charges ponctuelles) en interaction effective invariante de jauge $U(1)$ ($\Leftrightarrow$ électrodynamique quantique) avec des charges ze et Ze.

$\Rightarrow$ 2 types de vertex



Calcul précédent $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d^2\sigma}{d^2\hat{p}_3} = \left(\frac{zZ\,\frac{e^2}{4\pi}}{2mx^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\right)^2\left(1+x^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

pour $\begin{matrix} m \\ ze \end{matrix} \ll \begin{matrix} M \text{ au repos} \\ Ze \end{matrix}$

i) $\begin{cases} \text{Charge } q & \longrightarrow \text{ vertex } -iq\gamma^\mu \\ \text{Charge } \varphi & \longrightarrow \text{ - - - } -i\varphi\gamma^\mu \end{cases}$

$\Rightarrow$ élément de matrice $\mathcal{M} \propto q\varphi$

proba de transition $\propto (q\varphi)^2$ indépendante des signes de q et φ séparément

ii) Particule incidente à basse vitesse $v_1 \ll 1$

$$x = \frac{|\vec{p}_1|}{m} \sim \frac{m v_1}{m} = v_1 \longrightarrow 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\sigma}{d^2\hat{p}_3} = \left(\frac{z Z \frac{e^2}{4\pi}}{2mv^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2}$$

iii) C'est la formule
- utilisée par Rutherford pour analyser la diffusion des α sur la matière (1912).
- obtenue par le même dans le cadre d'un modèle de particules classiques, avec interaction coulombienne (1911), c.à.d. un calcul à la Kepler.

C'est une chance historique que sa formule ait convenu pour cette analyse (qui a prouvé l'existence du noyau) alors qu'il s'agissait d'un processus quantique
$\Longrightarrow \begin{cases} \text{équation du mouvement inconnue (Schrödinger)} \\ \text{interaction encore moins connue} \end{cases}$

C'est une propriété de l'électrodynamique quantique (liée sans doute au fait que c'est une théorie de jauge) de $\xrightarrow[\text{non relat.}]{} V(r) = \frac{z Z e^2}{4\pi r} \xrightarrow[\text{classique}]{} V(r)$ idem.

---

16 c.m. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \longrightarrow \vec{p}_3 + \vec{p}_4$

$$\sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} = \omega_1 \omega_2 \Longrightarrow \boxed{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} = m M \sqrt{(1+x^2)(1+\varepsilon^2 x^2)}} \longrightarrow m M$$

---

17 18 19 20 L'énoncé compliquait un peu et inutilement les choses. Les calculs sont beaucoup plus simples en faisant les approximations $\varepsilon \doteq \frac{m}{M}$ et $x \doteq \frac{|\vec{p}_1|}{m} \ll 1$ plus tôt.

$$u_r(\vec{p}) = \sqrt{\omega + m} \begin{pmatrix} |r\rangle \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\omega + m} |r\rangle \end{pmatrix}$$

$$u_3^+ u_1 = \sqrt{\omega_3 + m} \sqrt{\omega_1 + m} \quad \langle r_3 | \; 1 + \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_3)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1)}{(\omega_3+m)(\omega_1+m)} \; | r_1 \rangle$$

Centre de masse $\omega_3 = \omega_1 = m\sqrt{1+x^2}$

$$\vec{p}_3 \cdot \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\,2} \; \hat{p}_1 \cdot \hat{p}_3 = m^2 x^2 \; \hat{p}_1 \cdot \hat{p}_3$$

$$\vec{p_3}\wedge\vec{p_1} = m^2x^2\ \hat{p}_3\wedge\hat{p}_1$$

$$\Rightarrow\ u_3^+u_1 = m\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\langle r_3|\,1+\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x^2})^2}\,\hat{p}_3\cdot\hat{p}_1 + i\,\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x^2})^2}\,\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_3\wedge\hat{p}_1)\,|r_1\rangle$$

$$\boxed{u_3^+u_1 \underset{x\ll 1}{\simeq} 2m\ \langle r_3|\,1+i\,\frac{x^2}{4}\,\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_3\wedge\hat{p}_1)\,|r_1\rangle}$$

(toujours en ne gardant que les contributions dominantes indépendante de $\vec{\sigma}$ et dépendante de $\vec{\sigma}$ respectivement.

De même :

$$U_4^+U_2 = (\omega_2+M)\langle r_4|\,1+\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p_4})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p_2})}{(\omega_2+M)^2}\,|r_2\rangle$$

avec $\begin{cases}\vec{p_4} = -\vec{p_3}\\ \vec{p_2} = -\vec{p_1}\end{cases}$

$$= M\left(1+\sqrt{1+\varepsilon^2x^2}\right)\langle r_4|\,1+\frac{\varepsilon^2x^2}{(1+\sqrt{1+\varepsilon^2x^2})^2}\,\hat{p}_3\cdot\hat{p}_1 + i\,\frac{\varepsilon^2x^2}{(1+\sqrt{1+\varepsilon^2x^2})^2}\,\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_3\wedge\hat{p}_1)\,|r_1\rangle$$

$$\boxed{U_4^+U_2 \underset{\substack{x\ll 1\\ \varepsilon\to 0}}{\simeq} 2M\ \langle r_4|r_2\rangle}$$

$$\bar{u}_3\vec{\gamma}u_1 = u_3^+\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & \end{pmatrix}u_1 = u_3^+\begin{pmatrix} & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & \end{pmatrix}u_1$$

$$= \sqrt{\omega_3+m}\sqrt{\omega_1+m}\ \langle r_3|\,\vec{\sigma}\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p_1}}{\omega_1+m} + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p_3}}{\omega_3+m}\,\vec{\sigma}\,|r_1\rangle$$

$$\begin{cases}(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}\cdot\{\vec{B}+i\,\vec{B}\wedge\vec{\sigma}\}\quad\forall\vec{A}\\ \Rightarrow\ \vec{\sigma}\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{B}+i\,\vec{B}\wedge\vec{\sigma}\\ \quad(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})\,\vec{\sigma} = \vec{A}-i\,\vec{A}\wedge\vec{\sigma}\end{cases}$$

$$= \langle r_3|\,\vec{p_1}+\vec{p_3} + i\,(\vec{p_1}-\vec{p_3})\wedge\vec{\sigma}\,|r_1\rangle$$

$$\boxed{\bar{u}_3\vec{\gamma}u_1 = mx\ \langle r_3|\,\hat{p}_1+\hat{p}_3 + i\,(\hat{p}_1-\hat{p}_3)\wedge\vec{\sigma}\,|r_1\rangle}$$

$$\bar{U}_4\vec{\gamma}U_2 = \langle r_4|\,\vec{p_2}+\vec{p_4} + i\,(\vec{p_2}-\vec{p_4})\wedge\vec{\sigma}\,|r_2\rangle$$

$$\boxed{\bar{U}_4\vec{\gamma}U_2 = -mx\ \langle r_4|\,\hat{p}_1+\hat{p}_3 + i\,(\hat{p}_1-\hat{p}_3)\wedge\vec{\sigma}\,|r_2\rangle}$$

$$(u_3^+u_1)(U_4^+U_2) \simeq 4mM\ \langle r_3|\,1+i\,\frac{x^2}{4}\,\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_3\wedge\hat{p}_1)\,|r_1\rangle\langle r_4|r_2\rangle$$

tandis que

$$(\bar{u}_3 \vec{\gamma} u_1)\cdot(\bar{U}_4 \vec{\gamma} U_2) = -m^2x^2 \langle r_3|\hat{p}_1+\hat{p}_3+i(\hat{p}_1-\hat{p}_3)\wedge\vec{\sigma}|r_1\rangle\langle r_4|\hat{p}_1+\hat{p}_3+i\cdots\cdots|r_2\rangle$$

$$= -\varepsilon x^2\, mM \langle r_3|\hat{p}_1+\hat{p}_3+i\cdots\cdots\cdots|r_2\rangle$$

c-à-d. une contribution uniquement de recul ($\propto\varepsilon$) par rapport à celles de $(u_3^+u_1)(U_4^+U_2)$.

$$\Rightarrow \boxed{(\bar{u}_3 \underset{\sim}{\gamma} u_1)\cdot(\bar{U}_4 \underset{\sim}{\gamma} U_2) \underset{\substack{x\to 0\\ \varepsilon\to 0}}{\simeq} 4mM\langle r_3|1+i\frac{x^2}{4}\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_3\wedge\hat{p}_1)|r_1\rangle\langle r_4|r_2\rangle}$$

---

(21)

$$\mathcal{M} = -\frac{q^2}{\underset{\sim}{k}^2}(\bar{u}_3 \underset{\sim}{\gamma} u_1)\cdot(\bar{U}_4 \underset{\sim}{\gamma} U_2)$$

avec $\underset{\sim}{k}^2 = (\underset{\sim}{p}_1-\underset{\sim}{p}_3)^2 = -(\vec{p}_1-\vec{p}_3)^2 = -\vec{k}^2$

et $x^2(\hat{p}_3\wedge\hat{p}_1) = \frac{1}{m^2}\vec{p}_3\wedge\vec{p}_1 = \frac{1}{m^2}(\vec{p}_1-\vec{k})\wedge\vec{p}_1 = \frac{1}{m^2}\vec{p}_1\wedge\vec{k}$

$$\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} = mM\sqrt{(1+x^2)(1+\varepsilon^2x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} mM$$

$$\boxed{\begin{aligned}\lim \frac{\mathcal{M}}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}} &= q^2\langle r_3|r_1\rangle\langle r_4|r_2\rangle\frac{1}{\vec{k}^2}\\ &+ i\frac{q^2}{4m^2}\langle r_3|\vec{\sigma}|r_1\rangle\langle r_4|r_2\rangle\cdot\left(\vec{p}_1\wedge\frac{\vec{k}}{\vec{k}^2}\right)\end{aligned}}$$

---

(22)

$$\langle r_3r_4|V(\vec{r})|r_1r_2\rangle = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\lim\frac{\mathcal{M}}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}$$

$$= q^2\langle r_3|r_1\rangle\langle r_4|r_2\rangle\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\frac{1}{\vec{k}^2}$$

$$+i\frac{q^2}{4m^2}\langle r_3|\vec{\sigma}|r_1\rangle\langle r_4|r_2\rangle\cdot\left\{\vec{p}_1\wedge\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\frac{\vec{k}}{\vec{k}^2}\right\}$$

Transformées de Fourier:

$$\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\frac{1}{\vec{k}^2} = \frac{1}{4\pi r}$$

$$\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\frac{\vec{k}}{\vec{k}^2} = -\frac{1}{i}\vec{\nabla}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\frac{1}{\vec{k}^2} = i\vec{\nabla}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)$$

$$= i\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = \frac{q^2}{4\pi r} - \frac{q^2}{4m^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{p_1}\wedge\vec{r})$$

et il ne reste qu'à poser $\begin{cases} \vec{S} \hat{=} \dfrac{\vec{\sigma}}{2} \\ \vec{L} \hat{=} \vec{r}\wedge\vec{p} \end{cases}$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{q^2}{4\pi r} + \frac{1}{2m^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{q^2}{4\pi r}\right)\,\vec{L}\cdot\vec{S}}$$

avec $q = -|e|$

---

(23) En assimilant, pour les besoins de ce modèle, le noyau à une "particule élémentaire" de masse $M \gg m$ et de charge $Z|e|$:

$$\boxed{V(\vec{r}) = \underbrace{-\frac{Ze^2}{4\pi r}}_{\text{Coulomb ponctuel}} + \underbrace{\frac{1}{2m^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(-\frac{Ze^2}{4\pi r}\right)\vec{L}\cdot\vec{S}}_{\text{Larmor-Thomas}}}$$

On peut même faire un peu mieux en tenant compte de la taille finie de la distribution de charge du noyau :

$$V(\vec{r}) = v(r) + \frac{1}{2m^2}\,\frac{1}{r}\,v'(r)\;\vec{L}\cdot\vec{S}$$

That's all folks.

Supplément à $e^- \mu^-$, DEA 10 janvier 1991

$$\underset{m}{1} + \underset{M}{2} \longrightarrow \underset{m}{3} + \underset{M}{4}$$

<u>EDφ</u> :

$$S_{fi} \sim -i\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)\,\frac{1}{V^2}\,\frac{\mathcal{M}}{4mM}$$

$$\frac{\mathcal{M}}{4mM} \sim q^2\,\delta_{\lambda_3\lambda_1}\,\delta_{\lambda_4\lambda_2}\,\frac{1}{\vec{k}^2} + i\,\frac{q^2}{4m^2}\,\vec{\sigma}_{\lambda_3\lambda_1}\,\delta_{\lambda_4\lambda_2}\cdot\left(\vec{p}_1 \wedge \frac{\vec{k}}{\vec{k}^2}\right)$$

avec $\vec{k} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3$

<u>Schrödinger</u> :

$$S_{fi} = -i\,(2\pi)\,\delta(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_2)\,\langle \vec{p}_3\lambda_3\,\vec{p}_4\lambda_4 | V | \vec{p}_1\lambda_1\,\vec{p}_2\lambda_2 \rangle$$

<u>Identification</u> :

$$\langle \vec{p}_3\lambda_3\,\vec{p}_4\lambda_4 | V | \vec{p}_1\lambda_1,\vec{p}_2\lambda_2 \rangle = (2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)\,\frac{1}{V^2}\,\frac{\mathcal{M}}{4mM}$$

$$(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}) \sim \int d^3\vec{r}\,e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} = \begin{cases} V & \text{si } \vec{p} = 0 \\ 0 & \vec{p} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{p}_3\lambda_3\,\vec{p}_4\lambda_4 | V | \vec{p}_1\lambda_1\,\vec{p}_2\lambda_2 \rangle = \begin{cases} \frac{1}{V}\,\frac{\mathcal{M}}{4mM} & \text{si } \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ 0 & \text{si } \neq \end{cases}$$

$\{$ $\mathcal{M}$ évalué dans la limite $\frac{|\vec{p}_4|}{M}, \frac{|\vec{p}_2|}{M} \ll 1$, mais impulsion totale conservée

$\{$ $\mathcal{M} \propto \delta_{\lambda_4\lambda_2}$

$\Rightarrow$ potentiel effectif dans l'espace des états d'électron, éléments de matrice :

$$\langle \vec{p}_3\lambda_3 | V_{(eff)} | \vec{p}_1\lambda_1 \rangle = \frac{1}{V}\left\{ q^2\,\delta_{\lambda_3\lambda_1}\,\frac{1}{\vec{k}^2} + i\,\frac{q^2}{4m^2}\,\vec{\sigma}_{\lambda_3\lambda_1}\cdot\left(\vec{p}_1 \wedge \frac{\vec{k}}{\vec{k}^2}\right)\right\}$$

$\Rightarrow$ en opérateur dans l'espace des états de spin de l'électron :

$$\langle \vec{p}_3 | V | \vec{p}_1 \rangle = \frac{1}{V}\left\{ q^2\,\frac{1}{\vec{k}^2}\,\mathbb{I} + i\,\frac{q^2}{4m^2}\,\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}_1 \wedge \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|^2}\right)\right\}$$

$$\int d^3\vec{r}\,d^3\vec{r}\,'\,\langle \vec{p}_3 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | V | \vec{r}\,' \rangle \langle \vec{r}\,' | \vec{p}_1 \rangle = \dots$$

1 particule dans V : $\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}$

$$\Rightarrow \int d^3\vec{r}\,d^3\vec{r}\,'\,\frac{e^{i(\vec{p}_1\cdot\vec{r}\,' - \vec{p}_3\cdot\vec{r})}}{V}\,\langle \vec{r} | V | \vec{r}\,' \rangle = \frac{1}{V}\left\{ q^2\,\frac{1}{\vec{k}^2} + i\,\frac{q^2}{4m^2}\,\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}_1 \wedge \frac{\vec{k}}{\vec{k}^2}\right)\right\}$$

Grand volume $\Rightarrow$

$$\langle \vec{r} | V | \vec{r}\,' \rangle \sim \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3}\, e^{i(\vec{p}_3\cdot\vec{r} - \vec{p}_1\cdot\vec{r}\,')} \left\{ q^2\,\frac{1}{\vec{k}^2} + i\,\frac{q^2}{4m^2}\,\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}_1 \wedge \frac{\vec{k}}{\vec{k}^2}\right)\right\}$$

impulsion de transfert
$\Rightarrow$ local

impulsion de l'électron
attention
$\Rightarrow$ potentiel <u>non local</u>

Cas d'un potentiel dépendant de l'impulsion

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left\{ \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{R}, \vec{P}) \right\} |\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow i \frac{d}{dt} \langle \vec{r} | \psi(t) \rangle = \langle \vec{r} | \frac{\vec{P}^2}{2m} | \psi(t) \rangle + \langle \vec{r} | V(\vec{R}, \vec{P}) | \psi(t) \rangle$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + \int d^3\vec{r}\,' \langle \vec{r} | V(\vec{R}, \vec{P}) | \vec{r}\,' \rangle \psi(\vec{r}\,', t)$$

Pour nous :

$$\langle \vec{r} | V | \psi \rangle = \int d^3\vec{r}\,' \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}_3 \cdot \vec{r} - \vec{p}_1 \cdot \vec{r}\,')} \left\{ \frac{q^2}{\vec{k}^2} + i \frac{q^2}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p}_1 \wedge \frac{\vec{k}}{\vec{k}^2} \right) \right\} \psi(\vec{r}\,')$$

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_1 - \vec{k}, \quad \int d^3\vec{p}_3 \ldots = \int d^3\vec{k} \ldots$$

$$= \int d^3\vec{r}\,' \psi(\vec{r}\,') \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left\{ \frac{q^2}{\vec{k}^2} - \frac{q^2}{4m^2} i \vec{\sigma} \cdot \underbrace{\left(\frac{\vec{k}}{\vec{k}^2} \wedge \vec{p} \right)}_{} \right\}$$

ordre important pour la suite, car $(\vec{\sigma}\cdot\vec{k})$ et $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})$ ne commutent pas, même si $\vec{k}$ et $\vec{p}$ commutent.

$$= q^2 \int d^3\vec{r}\,' \psi(\vec{r}\,') \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{\vec{k}^2} \quad \Big\} = \langle \vec{r} | V_1 | \psi \rangle$$

$$-\frac{q^2}{4m^2} \int d^3\vec{r}\,' \psi(\vec{r}\,') \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} i\vec{\sigma} \cdot \left(\frac{\vec{k}}{\vec{k}^2} \wedge \vec{p} \right) \quad \Big\} = \langle \vec{r} | V_2 | \psi \rangle$$

$$\langle \vec{r} | V_1 | \psi \rangle = q^2 \int d^3\vec{r}\,' \psi(\vec{r}\,') \, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,') \frac{1}{4\pi r}$$

$$= \frac{q^2}{4\pi r} \psi(\vec{r}) = \frac{q^2}{4\pi r} \langle \vec{r} | \psi \rangle = \int d^3\vec{r}\,' \langle \vec{r} | \frac{q^2}{4\pi R} | \vec{r}\,' \rangle \langle \vec{r}\,' | \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \frac{q^2}{4\pi R}$$

$$i \vec{\sigma} \cdot \left(\frac{\vec{k}}{\vec{k}^2} \wedge \vec{p} \right) = \frac{1}{\vec{k}^2} \left\{ (\vec{\sigma}\cdot\vec{k})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) - \vec{k}\cdot\vec{p} \right\}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{p}_1 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)\cdot\vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\,2} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = \vec{p}_1^{\,2} (1 - \hat{p}_1 \cdot \hat{p}_3) = m^2 x^2 (1 - \hat{p}_1 \cdot \hat{p}_3)$$

$\Rightarrow$ correction d'ordre x^2 à la partie indépendante de $\vec{\sigma}$; négligée

$$\Rightarrow \langle \vec{r} | V_2 | \psi \rangle \simeq -\frac{q^2}{4m^2} \int d^3\vec{r}\,' \psi(\vec{r}\,') \left\{ \vec{\sigma} \cdot \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\vec{k}}{\vec{k}^2} \right\} \left\{ \vec{\sigma} \cdot \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \vec{p} \right\}$$

$$= -\frac{q^2}{4m^2} \int d^3\vec{r}\,' \psi(\vec{r}\,') \left\{ \vec{\sigma} \cdot \frac{1}{-i} \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi r} \right) \right\} \left\{ \vec{\sigma} \cdot \frac{1}{i} \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,') \right) \right\}$$

$$= -\frac{q^2}{4m^2} \int d^3\vec{r}\,' \psi(\vec{r}\,') \left\{ \vec{\sigma} \cdot \frac{-\vec{r}}{4\pi r^3} \right\} \left\{ \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,') \right\}$$

$$\langle \vec{r}|V_2|\psi\rangle = \frac{q^2}{16\pi m^2}\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}_{/\vec{r}}\right)\int d^3\vec{r}\,'\,\psi(\vec{r}\,')\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$= \frac{q^2}{16\pi m^2}\left\{\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{\nabla}_{/\vec{r}} + i\,\vec{\sigma}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\wedge\vec{\nabla}_{/\vec{r}}\right)\right\}\psi(\vec{r})$$

$$= \frac{q^2}{16\pi m^2}\left\{\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{\nabla}\,\psi(\vec{r}) - \frac{1}{r^3}\,\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{r}\wedge\frac{1}{i}\vec{\nabla}\right)\psi(\vec{r})\right\}$$

1er terme un peu spécial, et même trouble, ne serait-ce que parceque ce potentiel en représentation $\vec{r}$ résulte de la transformée de Fourier (intégration sur toutes les impulsions, jusqu'à l'∞) d'une limite de NR qui n'est valide qu'à basse impulsion !

Contribution à l'énergie, en valeur moyenne dans l'état $|\psi\rangle$:

$$\int d^3\vec{r}\,\langle\psi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|V_{2\,1er}|\psi\rangle$$

$$= \frac{q^2}{16\pi m^2}\int d^3\vec{r}\,\psi^*(\vec{r})\,\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\psi(\vec{r})$$

états stationnaires $\begin{cases}\psi(\vec{r}) = R(r)\,F(\hat{r})\\ \psi^*(\vec{r}) = R(r)\,F^*(\hat{r})\end{cases}$

$$= \frac{q^2}{16\pi m^2}\int_0^\infty dr\,R(r)\,R'(r)\int d^2\hat{r}\,F^*(\hat{r})F(\hat{r}) = \frac{q^2}{16\pi m^2}\,\frac{1}{2}R^2(r)\Big|_0^\infty = \frac{q^2}{16\pi m^2}\left(-\frac{1}{2}R^2(0)\right)$$

(pour états liés $R(\infty)=0$)

or $R(0)\neq 0$ seulement pour onde s $(l=0)$

et alors $F(\hat{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}R^2(0) = -\frac{1}{2}\,4\pi\,\psi^*(\vec{0})\,\psi(0)$$

$$= -2\pi\int d^3\vec{r}\,\psi^*(\vec{r})\,\delta^3(\vec{r})\,\psi(\vec{r})$$

$$= \int d^3\vec{r}\,\langle\psi|\vec{r}\rangle\left(-2\pi\,\delta^3(\vec{r})\right)\psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow\ \langle\vec{r}|V_{2\,1er}|\psi\rangle \leftrightarrow \frac{q^2}{16\pi m^2}(-2\pi)\,\delta^3(\vec{r})\,\psi(\vec{r}) = -\frac{q^2}{8m^2}\,\delta^3(\vec{r})\,\psi(\vec{r})$$

2e terme :

$$\langle\vec{r}|V_{2\,2e}|\psi\rangle = -\frac{q^2}{16\pi m^2 r^3}\,2\,\vec{S}\cdot\underbrace{\left(\vec{r}\wedge\frac{1}{i}\vec{\nabla}\right)}_{\text{représentative de } \vec{L}=\vec{R}\wedge\vec{P}}\psi(\vec{r})$$

Tout regroupé :

$$\boxed{V(\vec{R},\vec{P}) = \frac{q^2}{4\pi R} - \frac{q^2}{8m^2}\,\delta^3(\vec{R}) - \frac{q^2}{8\pi m^2 R^3}\,\vec{L}\cdot\vec{S}}$$