

L'HELICITE

ENCORE PLUS DE FORMALISME
POUR MOINS DE CALCULS

Un sujet d'examen de théorie quantique des champs
6 janvier 1993, 14 heures 30

Le formalisme de l'hélicité est un outil puissant pour le calcul pratique des processus. Le présent problème a pour but, visé sinon atteint, d'en montrer la mise en œuvre dans le cas le plus simple, à savoir l'électrodynamique quantique avec un seul type de fermions, dans la limite des hautes énergies.

Votre rédaction personnelle doit nous (P.B. et/ou A.L.) être gracieusement remise le 8 janvier, 15 heures dernier délai, salle de cours du DEA, #913. Pour le reste, vous pouvez travailler comme vous l'entendez, ce qui ne m'interdit pas de proférer quelques avis :

- Il est maintenant démontré que le travail en équipe (le "remue méninges") peut ralentir considérablement la progression, surtout parce qu'il doit être l'occasion d'exercer votre esprit critique. Quoi de plus irritant que la lecture d'une erreur répétée à satiété? Efforcez vous de commettre des erreurs originales! Ou alors travaillez seule.
- Des erreurs, elles absolument involontaires, ont pu se glisser dans l'énoncé qui suit. Ne restez pas esclaves du texte dont le ton directif n'est, dans mon esprit, destiné qu'à vous aider éventuellement.
- Votre aptitude à trouver de bonnes sources est une forme de compétence, mais le bon usage voudrait que l'on n'omette pas de citer celles-ci.
- Efforcez vous de parvenir à une rédaction claire, concise et originale. Vous concevrez que les exigences du lecteur sous ce rapport ne sont pas les mêmes que lors d'une épreuve en temps plus limité. Tout ce qui peut troubler l'assoupissement du dit lecteur est souhaitable.
- Soyez rassurée; il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions qui suivent pour réaliser une performance honorable.

<i>votre contact</i> : Alain Laverne	tél.
couloir 24-14, 5 ^e ét.	44 27 79 79
Université Paris 7	
2 place Jussieu, Paris V ^e	
158 rue St. Jacques, Paris V ^e	43 29 09 02

Vous brûlez maintenant d'envie de calculer enfin la section efficace du processus d'annihilation $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$, avec dans les rôles principaux :

- un électron, de masse m , charge q , dans le mode (\mathbf{p}_-, r_-) , bispineur $u_{r_-}(\mathbf{p}_-)$,
- un positron, m , $-q$, mode (\mathbf{p}_+, r_+) , bispineur $v_{r_+}(\mathbf{p}_+)$,
- un photon dans le mode (\mathbf{k}_1, α_1) , quadrivecteur de polarisation $\varepsilon_{\alpha_1}(\mathbf{k}_1)$,
- un photon dans le mode (\mathbf{k}_2, α_2) , polarisation $\varepsilon_{\alpha_2}(\mathbf{k}_2)$,

le tout — puisqu'il faut bien en choisir un — dans le repère dit du "centre de masse". Evidemment, vous respectez la coutume consistant à poser $s \stackrel{\text{df}}{=} (p_- + p_+)^2$, $t \stackrel{\text{df}}{=} (p_- - k_1)^2$, et $u \stackrel{\text{df}}{=} (p_- - k_2)^2$.

LE CALCUL ORTHODOXE, TENTATIVES

1. *i)* Dessinez les graphes de l'électrodynamique à l'ordre le plus bas contribuant à ce processus.
ii) Ecrivez, à l'aide des règles de Feynman, les expressions des éléments de matrice invariants correspondants, dits direct, $\mathcal{M}_1(r_+, r_-; \alpha_1, \alpha_2)$, et d'échange, $\mathcal{M}_2(r_+, r_-; \alpha_1, \alpha_2)$, en fonction de t , u , et autres quantités précitées.
2. Calculez la section efficace différentielle $d^2\sigma/d^2\hat{\mathbf{k}}_1$ en fonction de m , de s et de l'élément de matrice de la transition, $M = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ ici.
3. *i)* Cette expérience est à présent envisagée avec des faisceaux d'électrons et de positrons non polarisés — autrement dit, autant de couples de modes $(r_+, r_-) = (1, 1)$ que $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(2, 2)$ —, et des détecteurs de photons indifférents au mode de polarisation des dits photons. Par quelle moyenne $\overline{|M|^2}$ faut-il remplacer $|M|^2$ pour obtenir la section efficace différentielle ?
ii) Exprimez $\overline{|M|^2}$ sous forme de traces.
iii) N'êtes-vous pas convaincue que le calcul de ces traces, même s'il ne présente plus aucune difficulté, risque de prendre beaucoup de temps, (de sang) d'encre et de papier ?

LIMITE A HAUTE ENERGIE ?

Dans l'espoir que le calcul soit plus simple, vous vous concentrez sur le cas $s \gg m^2$.

4. *i)* Précisez soigneusement les conditions cinématiques dans lesquelles on a alors le droit d'utiliser les approximations $s \approx 2(p_- \cdot p_+)$, $t \approx -2(p_- \cdot k_1)$, $u \approx -2(p_- \cdot k_2)$, $\not{p}_- - \not{k}_1 + m \approx \not{p}_- - \not{k}_1$, et $\not{p}_- - \not{k}_2 + m \approx \not{p}_- - \not{k}_2$.
ii) Ecrivez les expressions de \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 dans ces approximations, puis la moyenne $\overline{|M|^2}$ correspondante en termes de traces.

Les choses se sont un peu simplifiées, certes, mais il vous resterait encore à calculer trois traces de produits de huit matrices γ^μ et à effectuer les sommations sur les polarisations α_1 et α_2 . Ici, les contributions de deux graphes, $|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2$, nécessitent le calcul de trois traces et, plus généralement, les contributions de n graphes, $|\mathcal{M}_1 + \dots + \mathcal{M}_n|^2$ impliqueront le calcul — rapidement prohibitif —

de $n(n+1)/2$ traces ! Or, notre malheur vient certainement en partie du fait que les expressions de $\mathcal{M}_1(r_+, r_-; \alpha_1, \alpha_2)$ et $\mathcal{M}_2(r_+, r_-; \alpha_1, \alpha_2)$ ne jouissent d'aucune règle de sélection évidente qui diminuerait éventuellement le nombre de contributions à prendre en compte. De telles règles de sélection vont nous être fournies par l'examen des propriétés des bispineurs de base à haute énergie, et par l'adoption de quadrivecteurs de base de polarisation circulaire astucieusement écrits.

MODES D'HELICITE DES FERMIONS

Avant d'étudier quelques propriétés des bispineurs de base dont les expressions ont été construites en cours, il vaut la peine de bien préciser ce que l'on entend par modes d'hélicité ± 1 pour les électrons et les positrons respectivement. (La vieille histoire des trous devrait vous mettre la puce à l'oreille : détruire un électron d'énergie $-\omega$, impulsion \mathbf{p} , charge q , hélicité $+1$, c'est tout comme créer un positron d'énergie ω , impulsion $-\mathbf{p}$, charge $-q$... et d'hélicité -1 , intuition que l'on va vérifier.)

5. *i*) Vous souvenant de l'expression des constantes du mouvement associées à l'invariance par rotation du champ de Dirac libre,

$$\mathbf{J} = \int d^3\mathbf{x} : \psi^+(\mathbf{x}, t) \left\{ \mathbf{x} \wedge \frac{1}{i} \nabla + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right\} \psi(\mathbf{x}, t) :,$$

avec $\sigma^1 \stackrel{\text{df}}{=} \frac{i}{2} [\gamma^2, \gamma^3]$, etc., vous définissez :

$$\mathbf{S}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int d^3\mathbf{x} : \psi^+(\mathbf{x}, t) \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right\} \psi(\mathbf{x}, t) :,$$

grandeur physique du champ — caractéristique de son comportement intrinsèque de bispineur — mais qui, elle, n'a aucune raison d'être une constante du mouvement. A l'aide du développement en modes de l'opérateur de champ de Dirac libre, déterminez l'expression de l'opérateur $\mathbf{S}(t)$ en termes d'opérateurs de création et d'annihilation d'électrons et de positrons.

ii) Pourquoi avoir prise, plutôt qu'une autre, une prescription d'ordre normal pour les produits d'opérateurs dans les définitions de \mathbf{J} et \mathbf{S} ?

iii) Soit un vecteur de mode \mathbf{p} . Calculez les valeurs moyennes de l'opérateur $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S}(t)$ dans un état à un électron du mode (\mathbf{p}, r) d'une part et, d'autre part, dans un état à un positron du mode (\mathbf{p}, r) , en termes de bispineurs et des matrices $\boldsymbol{\sigma}$.

iv) Etant parfaitement libre de choisir l'axe spatial $\hat{\mathbf{z}}$ selon $\hat{\mathbf{p}}$, vous disposez des expressions des bispineurs de base $u_r(|\mathbf{p}|, \hat{\mathbf{z}})$, $v_r(|\mathbf{p}|, \hat{\mathbf{z}})$, données en cours dans la représentation de Dirac. En déduire (c'est un simple changement de notations) les expressions des bispineurs $u_+(|\mathbf{p}|, \hat{\mathbf{z}})$ et $u_-(|\mathbf{p}|, \hat{\mathbf{z}})$ tels que les valeurs moyennes de $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S}(t)$ dans un état à un électron de ces modes valent respectivement $+1/2$ et $-1/2$. Même question (attention) pour les bispineurs v_+ et v_- associés aux

modes de positrons. Les modes $\lambda = \pm$ seront maintenant — et fort logiquement — dits d'hélicités + et — respectivement.

6. *i)* Calculez les expressions équivalentes à haute énergie des bispineurs $u_+(\mathbf{p}|\hat{\mathbf{3}})$, $u_-(\mathbf{p}|\hat{\mathbf{3}})$, $v_+(\mathbf{p}|\hat{\mathbf{3}})$ et $v_-(\mathbf{p}|\hat{\mathbf{3}})$, puis l'action de la matrice γ^5 (dans la même représentation !) sur chacune de ces expressions.

ii) Montrez que les matrices $(1 \pm \gamma^5)/2$ constituent des projecteurs orthogonaux.

iii) Etablissez le tableau récapitulatif (capital pour la suite) des valeurs, asymptotiques à haute énergie, de $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)u_{\pm}(\mathbf{p})$, de $\frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)v_{\pm}(\mathbf{p})$, de $\bar{u}_{\pm}(\mathbf{p})\frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$, et de $\bar{v}_{\pm}(\mathbf{p})\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, indépendamment de toute représentation et de tout choix d'axes spatiaux.

iv) Vous souvenant que les bispineurs $u_r(\mathbf{p})$ et $v_r(\mathbf{p})$ sont, par définition, solutions de $(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0$ et de $(\not{p} + m)v_r(\mathbf{p}) = 0$, complétez votre récapitulation de résultats utiles pour la suite en calculant les valeurs limites à haute énergie de $\not{p}u_{\pm}(\mathbf{p})$, de $\not{p}v_{\pm}(\mathbf{p})$, de $\bar{u}_{\pm}(\mathbf{p})\not{p}$, et de $\bar{v}_{\pm}(\mathbf{p})\not{p}$.

MODES D'HELICITE DES PHOTONS

Associés à un mode de photon de vecteur \mathbf{k} et à deux quadrivecteurs p et q du genre lumière et par ailleurs quelconques (mais indépendants) on définit les deux quadrivecteurs :

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{\parallel}(\mathbf{k}) &\stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{2}N\{(q \cdot k)p - (p \cdot k)q\}, \\ \varepsilon'_{\perp}(\mathbf{k}) &\stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{2}N\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}q_{\alpha}p_{\beta}k_{\gamma},\end{aligned}$$

avec

$$N \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\sqrt{(p \cdot q)(p \cdot k)(q \cdot k)}},$$

où les $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}$ sont les composantes du tenseur de Levi-Civita ($\varepsilon^{0123} \stackrel{\text{df}}{=} 1$).

7. Calculez $(\varepsilon'_{\parallel} \cdot k)$, $(\varepsilon'_{\perp} \cdot k)$, $(\varepsilon'_{\parallel} \cdot \varepsilon'_{\perp})$, $(\varepsilon'_{\parallel})^2$ et $(\varepsilon'_{\perp})^2$. En déduire que les quadrivecteurs ε'_{\parallel} et ε'_{\perp} constituent des vecteurs de base de polarisation rectiligne tout à fait admissibles pour des photons transverses du mode \mathbf{k} . (Ces questions exigent un peu d'astuce et même de réflexion.)

8. *i)* Exprimez la matrice $\not{\varepsilon}'_{\parallel}$ en fonction de N et des produits $\not{p}\not{q}\not{k}$ et $\not{k}\not{p}\not{q}$.

ii) Soit les matrices $F^{\alpha\beta\gamma} \stackrel{\text{df}}{=} \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma} - \gamma^{\alpha}\eta^{\beta\gamma} + \gamma^{\beta}\eta^{\alpha\gamma} - \gamma^{\gamma}\eta^{\alpha\beta}$. Calculez $F^{\beta\alpha\gamma}$ et $F^{\alpha\gamma\beta}$ en fonction de $F^{\alpha\beta\gamma}$. Conclusion ?

iii) Calculez explicitement F^{123} , F^{023} , F^{013} et F^{012} en termes d'une matrice γ^{μ} et de la matrice γ^5 . En déduire que $F^{\alpha\beta\gamma} = -i\gamma_{\mu}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\gamma^5$.

iv) Montrez que $\gamma_{\mu}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} = i(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma} - \gamma^{\alpha}\eta^{\beta\gamma} + \gamma^{\beta}\eta^{\alpha\gamma} - \gamma^{\gamma}\eta^{\alpha\beta})\gamma^5$.

v) En déduire une expression de la matrice $\not{\varepsilon}'_{\perp}$ en termes de N (bien sûr), $\not{p}\not{q}\not{k}$, $\not{k}\not{p}\not{q}$ (amusant, non ?) et $(p \cdot q)$, \not{k} et γ^5 (ça c'est nouveau).

9. On définit maintenant d'autres vecteurs de base, dits de polarisation circulaire :

$$\varepsilon'_\pm \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon'_\parallel \pm i\varepsilon'_\perp).$$

i) Montrez que

$$\varepsilon'_\pm = N \left\{ \not{p} \not{q} \not{k} \frac{1 \pm \gamma^5}{2} - \not{k} \not{p} \not{q} \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \mp (p \cdot q) \not{k} \gamma^5 \right\}.$$

ii) A propos, qu'en est-il des matrices, notées $\not{\varepsilon}'_\pm$, associées à ε'_\pm ?

10. Mais il reste une simplification que vous pouvez effectuer sur les matrices $\not{\varepsilon}'_\pm$, lesquelles, vous ne pouvez l'ignorer, interviendront dans les calculs chaque fois qu'une ligne de photon externe est attachée à un vertex. Pour cela, il faut s'interroger sur le rôle du terme proportionnel à la matrice $\not{k} \gamma^5$ dans le calcul du processus proposé.

i) Soit donc, à l'ordre le plus bas, les graphes direct et d'échange du processus d'annihilation d'un électron et d'un positron (masse m , impulsions \mathbf{p} et \mathbf{q} , polarisations quelconques) en deux photons (impulsions \mathbf{k} et \mathbf{k}') et vous notez ε' la polarisation, quelconque, du photon \mathbf{k}' . Calculez la contribution globale (directe plus échange) du facteur $\not{k} \gamma^5$ attaché à la ligne de photon \mathbf{k} et à son vertex.

ii) Montrez que dans la limite des hautes énergies pour l'électron et le positron (autrement dit, p et q du genre lumière, encore autrement dit $m = 0$), cette contribution est nulle ? (Encore une question qui exige un peu d'astuce.)

Vous devriez être ainsi convaincue que le terme $\not{k} \gamma^5$ ne joue physiquement aucun rôle à haute énergie. Si vous êtes incrédule vous pouvez encore considérer le processus $e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma \gamma$ et vous assurer que la contribution résultante d'un facteur $\not{k} \gamma^5$ associé à la ligne et au vertex de l'un des trois photons, de quadri-impulsion k , est nulle dans la limite de fermions de masse nulle. Cela pourrait même se démontrer lorsqu'il y a des boucles, moyennant renormalisation bien entendu. Quoi qu'il en soit, vous avez maintenant toute licence, étant donnés deux quadrivecteurs p et q du genre lumière et un photon d'impulsion k , d'adopter à toute fin pratique, en lieu et place des matrices $\not{\varepsilon}'_\pm$, les matrices :

$$\not{\varepsilon}_\pm = N \left\{ \not{p} \not{q} \not{k} \frac{1 \pm \gamma^5}{2} - \not{k} \not{p} \not{q} \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \right\}.$$

POURQUOI C'EST PLUS SIMPLE ?

A haute énergie, pour plusieurs raisons...

11. *i)* Le choix des quadrivecteurs p et q est très libre. Lorsqu'une ligne de photon externe rencontre une ligne d'électron ou de positron externe, vous pouvez prendre pour p , ou q , l'impulsion de ce fermion. Vous pouvez alors montrer que pour des

fermions de masse nulle l'un des deux termes dans la formule de $\not{\epsilon}_\pm$ donnera une contribution nulle.

ii) Si les hélicités des fermions externes sont fixées, vous pouvez insérer des facteurs $(1 + \gamma^5)/2$ ou $(1 - \gamma^5)/2$ sur leurs lignes. A nouveau, un seul des deux termes de $\not{\epsilon}_\pm$ survit.

iii) Toujours dans le cas d'un vertex photon externe-fermion externe, vous obtenez, par exemple, un facteur

$$\dots \frac{\not{q} - \not{k}}{-2(q \cdot k)} \not{\epsilon}_\pm(\mathbf{k}) u(\mathbf{q})$$

Montrez que ce dénominateur peut être chassé, ce qui, vous n'en doutez pas, pourra simplifier considérablement l'addition des contributions de différents graphes.

RETOUR A LA CASE DEPART

Vous allez maintenant calculer sans difficulté le processus

$$e^+(\mathbf{p}_+) + e^-(\mathbf{p}_-) \rightarrow \gamma(\mathbf{k}_1) + \gamma(\mathbf{k}_2),$$

tout au moins à haute énergie. Vous aviez trouvé (question 4) les amplitudes \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 correspondant aux deux graphes à l'ordre le plus bas. Soit l'amplitude résultante,

$$M(\lambda_+, \lambda_-; \lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{M}_1(\lambda_+, \lambda_-; \lambda_1, \lambda_2) + \mathcal{M}_2(\lambda_+, \lambda_-; \lambda_1, \lambda_2),$$

en fonction de λ_+ (λ_-) l'hélicité du positron (de l'électron) et λ_1 (λ_2) l'hélicité du photon 1 (2). Evidemment, avec deux modes d'hélicité pour chacune des quatre particules, cela fait 16 amplitudes ! Et pourtant...

- 12.** i) Calculez, juste pour voir, $\mathcal{M}_1(+, +; \lambda_1, \lambda_2)$ et $\mathcal{M}_2(+, +; \lambda_1, \lambda_2)$. Qu'en concluez-vous pour ce qui est de $M(+, +; \lambda_1, \lambda_2)$ et de $M(-, -; \lambda_1, \lambda_2)$? (L'interaction électromagnétique est ambidextre !)
- ii) Calculez à présent $\mathcal{M}_1(+, -; +, +)$ et $\mathcal{M}_2(+, -; +, +)$. Qu'en est-il donc de $M(+, -; +, +)$? Et de $M(-, +; +, +)$, $M(+, -; -, -)$ et $M(-, +; -, -)$?
- iii) Calculez $\mathcal{M}_1(+, -; +, -)$, $\mathcal{M}_2(+, -; +, -)$ et $M(+, -; +, -)$ en fonction des bispineurs et de la seule matrice \not{k}_1 .
- 13.** i) Montrez que l'expression de $|M(+, -; +, -)|^2$ se réduit à un calcul de trace.
- ii) Utilisant les projecteurs $(1 \pm \gamma^5)/2$ et l'expression — que vous connaissez bien — du projecteur sur les modes d'énergie positive, $\sum_\lambda u_\lambda(\mathbf{p}) \bar{u}_\lambda(\mathbf{p})$, montrez que, toujours à haute énergie, l'on a

$$u_-(\mathbf{p}_-) \bar{u}_-(\mathbf{p}_-) = \frac{1 - \gamma^5}{2} \not{p}_-,$$

ainsi qu'une relation analogue pour $v_+(\mathbf{p}_+) \bar{v}_+(\mathbf{p}_+)$.

iii) Le calcul de trace n'est plus qu'un jeu d'enfant qui vous permet enfin d'obtenir la valeur de $|M(+, -; +, -)|^2$ en fonction de q , t et u , ainsi que la valeur de $|M(-, +; -, +)|^2$.

iv) Vous ne pouvez plus alors vous empêcher d'en déduire astucieusement (l'échange des photons 1 et 2 se traduit simplement sur les paramètres t et u) les valeurs de $|M(+, -; -, +)|^2$ et $|M(-, +; +, -)|^2$.

14. i) Calculez la moyenne $\overline{|M|^2}$.

ii) Calculez enfin la section efficace différentielle "non polarisée", à haute énergie, dans le système du "centre de masse", $d^2\sigma/d^2\hat{\mathbf{k}}_1$, en fonction de s , t , u et de la constante de structure fine α .

iii) Au fait, cette expression vous permet-elle de calculer la section efficace totale de ce processus ?

EPILOGUE

Puisqu'il vous reste évidemment du temps, et si le ♥ vous en dit encore, vous êtes maintenant à même de calculer le $\overline{|M|^2}$ à haute énergie d'un processus moins scolaire comme $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma$, à l'ordre le plus bas (combien de graphes et combien d'amplitudes $M(\lambda_+, \lambda_-; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$?).

C'est fini en ce qui me concerne. Bons baisers.

CORRIGE

1. (i)



(ii)

$$-i\mathcal{M}_1 = \bar{v}_+ (-iq\phi_2^*) i \frac{\not{p}_- - \not{k}_1 + m}{t - m^2} (-iq\phi_1^*) u_-$$

$$\mathcal{M}_1 = \frac{q^2}{t - m^2} \bar{v}_+ \phi_2^* (\not{p}_- - \not{k}_1 + m) \phi_1^* u_-$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{q^2}{u - m^2} \bar{v}_+ \phi_1^* (\not{p}_- - \not{k}_2 + m) \phi_2^* u_-$$

2.

$$M = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$$

$$S = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \frac{1}{\sqrt{2\omega_-} v} \frac{1}{\sqrt{2\omega_+} v} \frac{1}{\sqrt{2\omega_1} v} \frac{1}{\sqrt{2\omega_2} v} (-iM)$$

$$|S|^2 = \frac{1}{16} \frac{T}{V^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \frac{1}{\omega_- \omega_+} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} |M|^2$$

Système du "c.m." $\omega_- = \omega_+ = \omega$ ($= \omega_1 = \omega_2$)

$$s = (p_- + p_+)^2 = (2\omega)^2, \quad \omega^2 = \frac{s}{4}$$

Probabilité $\rightarrow d^3k_1, d^3k_2$:

$$\mathcal{P} = |S|^2 \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3/V} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3/V} = \frac{1}{16} \frac{T}{(2\pi)^2} \frac{1}{V} \frac{1}{\omega^2} \delta^4(p_i - p_f) |M|^2 \frac{d^3k_1}{\omega_1} \frac{d^3k_2}{\omega_2}$$

$$\overline{N_{\text{évén.}}}_{\text{t}} = N_+ N_- \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P} v_{\text{rel}} T \rightarrow \frac{T}{V} = \frac{1}{\mathcal{P} v_{\text{rel}}}$$

$$v_{\text{rel}} = 2v_- = 2 \frac{|\vec{p}_-|}{\omega_-} = 2\sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} = 2\sqrt{1 - 4\frac{m^2}{s}}$$

$$d^6\mathcal{P} = \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{v_{\text{rel}}} \frac{1}{\omega^2} \delta^4(p_i - p_f) |M|^2 \frac{d^3k_1}{\omega_1} \frac{d^3k_2}{\omega_2}$$

$$d^3\mathcal{P} = \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{v_{\text{rel}}} \frac{1}{\omega^2} \delta(2\omega - 2\omega_1) |M|^2 \frac{\omega_1}{\omega_2} \underbrace{d\omega_1}_{= \frac{1}{2} d(2\omega_1)} d^2\hat{k}_1$$

$$\frac{d^2\mathcal{P}}{d^2\hat{k}_1} = \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{v_{\text{rel}}} \frac{1}{\omega^2} |M|^2$$

$$\frac{d^2\mathcal{P}}{d^2\hat{k}_1} = \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{s\sqrt{1 - 4\frac{m^2}{s}}} |M|^2$$

4. (c)

$$s = (p_+ + p_-)^2 = 2m^2 + 2(p_+ \cdot p_-)$$

$$(p_+ \cdot p_-) = \omega_+ \omega_- - \vec{p}_+ \cdot \vec{p}_-$$

dans le c.m. $\vec{p}_+ = -\vec{p}_-$, $\left\{ \begin{array}{l} \omega_+ = \omega_- = \omega \\ |\vec{p}_\pm| = \sqrt{\omega^2 - m^2} = \omega \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow (p_+ \cdot p_-) = \omega^2 + \omega^2 \left(1 - \frac{m^2}{\omega^2}\right) = 2\omega^2 \left(1 - \frac{m^2}{2\omega^2}\right) \underset{\omega \gg m}{\sim} 2\omega^2 \gg m^2$$

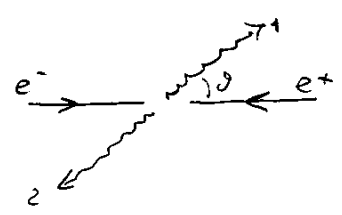
$$\Rightarrow \boxed{s \underset{s \gg m^2}{\sim} 2(p_+ \cdot p_-)}$$

$$t = (p_- - k_1)^2 = m^2 - 2(p_- \cdot k_1)$$

$$(p_- \cdot k_1) = \omega_- \omega_1 - \vec{p}_- \cdot \vec{k}_1 = \omega^2 - \sqrt{\omega^2 - m^2} \omega \cos(\vec{p}_-, \vec{k}_1)$$

$$= \omega^2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} \cos(\vec{p}_-, \vec{k}_1) \right\}$$

$$\underset{\omega \gg m}{\sim} \omega \left\{ 1 - \cos(\vec{p}_-, \vec{k}_1) \right\} \gg m \text{ si } 1 - \cos(\vec{p}_-, \vec{k}_1) \text{ fini}$$

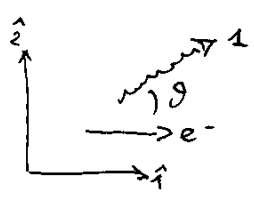


$$\boxed{t \underset{s \gg m^2, \theta \gg \epsilon}{\sim} -2(p_- \cdot k_1)}$$

cette approximation (commode pour la suite) n'est pas valide pour traiter la diffusion avant...

...ou arriere si on echange 1 et 2:

$$\boxed{u \underset{s \gg m^2, \theta \gg \epsilon}{\sim} -2(p_- \cdot k_2)}$$



$$\begin{aligned} p_- \cdot k_1 + m &= (\omega_- - \omega_1) \gamma^0 - (\vec{p}_- - \vec{k}_1) \cdot \vec{\gamma} + m \\ &= -\left\{ (|\vec{p}_-| - \omega_1 \cos \theta) \gamma^1 + \omega_1 \sin \theta \gamma^2 \right\} + m \\ &= -\omega_1 \left\{ \left(\sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} - \cos \theta \right) \gamma^1 + \sin \theta \gamma^2 \right\} + m \\ &\underset{\omega \gg m}{\sim} -\omega \left\{ (1 - \cos \theta) \gamma^1 + \sin \theta \gamma^2 \right\} + m \end{aligned}$$

dominant sauf si $\theta \lesssim 0$

$$\Rightarrow \boxed{p_- \cdot k_1 + m \underset{s \gg m^2, \theta \gg \epsilon}{\sim} p_- \cdot k_1}$$

$$\&c... \quad p_- \cdot k_2 + m \sim p_- \cdot k_2$$

Conclusion: haute energie (ω/m) $\Leftrightarrow m = 0$

si on n'est pas dans une géométrie de diffusion avant-arrière.

(ii) Dans cette approximation $\left\{ \begin{array}{l} \text{h.c. énergie} \\ \mathcal{D} \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow n=0$

$$\overline{|M|^2} = \frac{g^4}{16} \left\{ \frac{1}{(p-k_1)} \sum_{\alpha, \beta} \text{Tr} [\not{p}_+ \not{\epsilon}_2^* (\not{p}-\not{k}_1) \not{\epsilon}_1^* \not{p}_- \not{\epsilon}_1 (\not{p}-\not{k}_1) \not{\epsilon}_2] \right. \\ + \frac{1}{(p-k_2)} \sum_{\alpha, \beta} \text{Tr} [\not{p}_+ \not{\epsilon}_1^* (\not{p}-\not{k}_2) \not{\epsilon}_2^* \not{p}_- \not{\epsilon}_2 (\not{p}-\not{k}_2) \not{\epsilon}_1] \\ \left. + \frac{2}{(p-k_1)(p-k_2)} \sum_{\alpha, \beta} \text{Tr} [\not{p}_+ \not{\epsilon}_2^* (\not{p}-\not{k}_1) \not{\epsilon}_1^* \not{p}_- \not{\epsilon}_2 (\not{p}-\not{k}_2) \not{\epsilon}_1] \right\}$$

Evidemment, ça s'est simplifié, mais il reste quand même du travail (8 matrices γ toujours !)

Au fait, j'oubliais, dans cette approximation :

$$N_{b_1} = \frac{g^2}{-2(p-k_1)} \bar{v}_+ \not{\epsilon}_2^* (\not{p}-\not{k}_1) \not{\epsilon}_1^* u_- \\ N_{b_2} = \frac{g^2}{-2(p-k_2)} \bar{v}_+ \not{\epsilon}_1^* (\not{p}-\not{k}_2) \not{\epsilon}_2^* u_-$$

5.] (i) $\vec{S}(t) \hat{=} \int d^3\vec{x} : \psi^\dagger(\vec{x}, t) \frac{1}{2} \vec{\sigma} \psi(\vec{x}, t) :$

Développement en modes :

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{q}, s} \frac{1}{\sqrt{2\omega} v} \left\{ b_{\vec{q}, s} u_s(\vec{q}) e^{-i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})} + d_{\vec{q}, s}^+ v_s(\vec{q}) e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})} \right\} \\ \psi^\dagger(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{q}', s'} \frac{1}{\sqrt{2\omega'} v'} \left\{ d_{\vec{q}', s'}^+ v_{s'}^+(\vec{q}') e^{-i(\omega' t - \vec{q}' \cdot \vec{x})} + b_{\vec{q}', s'}^+ u_{s'}^+(\vec{q}') e^{i(\omega' t - \vec{q}' \cdot \vec{x})} \right\}$$

intégrales de volume : $\frac{1}{v} \int d^3\vec{x} e^{i(\vec{q}' - \vec{q}) \cdot \vec{x}} = \delta_{\vec{q}' \vec{q}}$

$$\Rightarrow \vec{S}(t) = \sum_{\vec{q}, s, s'} \frac{1}{2\omega} \left\{ \begin{array}{l} v_{s'}^+(-\vec{q}) \frac{\vec{\sigma}}{2} u_s(\vec{q}) e^{-2i\omega t} : d_{-\vec{q}, s'}^+ b_{\vec{q}, s} : \\ + u_{s'}^+(-\vec{q}') \frac{\vec{\sigma}}{2} v_s(\vec{q}) e^{2i\omega t} : b_{-\vec{q}', s'}^+ d_{\vec{q}, s}^+ : \\ + u_{s'}^+(\vec{q}) \frac{\vec{\sigma}}{2} u_s(\vec{q}) : b_{\vec{q}, s'}^+ b_{\vec{q}, s} : \\ + v_s^+(\vec{q}) \frac{\vec{\sigma}}{2} v_s(\vec{q}) : d_{\vec{q}, s}^+ d_{\vec{q}, s}^+ : \end{array} \right\}$$

(ii) La prescription d'ordre normal ne change quelque chose que pour le terme $: d_{\vec{q}, s}^+ d_{\vec{q}, s}^+ : = - d_{\vec{q}, s}^+ d_{\vec{q}, s}^+ :$.
Des deux ordres possibles, l'autre, d et d^+ , donnerait une valeur moyenne infinie à cette grandeur physique en absence de toute particule (vide), ce qui est gênant pour l'interprétation de la théorie (le vieux problème de Dirac avec sa mer refait surface !)

(iii)

$$|e^{-\vec{p}\cdot\vec{r}}\rangle \hat{=} b_{\vec{p}^+}^+ |0\rangle$$

$$|e^{+\vec{p}\cdot\vec{r}}\rangle \hat{=} d_{\vec{p}^+}^+ |0\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle \vec{p} \cdot \vec{S}(t) \rangle_{e^{-\vec{p}\cdot\vec{r}}} = \frac{1}{4\omega} u_r^+(\vec{p}) \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_r(\vec{p}) \\ \langle \vec{p} \cdot \vec{S}(t) \rangle_{e^{+\vec{p}\cdot\vec{r}}} = -\frac{1}{4\omega} v_r^+(\vec{p}) \vec{p} \cdot \vec{\sigma} v_r(\vec{p}) \end{cases}$$

constantes du mouvement /
annulent-elles non ?

(iv)

$$\vec{p} = |\vec{p}| \hat{z} \Rightarrow \hat{p} \cdot \vec{\sigma} = \sigma^3$$

$$\begin{cases} \langle \vec{p} \cdot \vec{S}(t) \rangle_{e^{-\vec{p}\cdot\vec{r}}} = \frac{1}{4\omega} u_r^+(|\vec{p}|/\hat{z}) \sigma^3 u_r(|\vec{p}|/\hat{z}) \\ \langle \vec{p} \cdot \vec{S}(t) \rangle_{e^{+\vec{p}\cdot\vec{r}}} = -\frac{1}{4\omega} v_r^+() \sigma^3 v_r() \end{cases}$$

Dans la représentation de Dirac :

$$\begin{cases} u_1(|\vec{p}|/\hat{z}) = \sqrt{\omega+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{|\vec{p}|}{\omega+m} \\ 0 \end{pmatrix} & u_2(|\vec{p}|/\hat{z}) = \sqrt{\omega+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{|\vec{p}|}{\omega+m} \end{pmatrix} \\ v_1(|\vec{p}|/\hat{z}) = \sqrt{\omega+m} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{|\vec{p}|}{\omega+m} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & v_2(|\vec{p}|/\hat{z}) = \sqrt{\omega+m} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{\omega+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\sigma^3 = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2] = i \gamma^1 \gamma^2 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -\sigma_1 \sigma_2 & \\ & -\sigma_1 \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

avec $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma^3 u_1(|\vec{p}|/\hat{z}) = u_1(|\vec{p}|/\hat{z}) & \sigma^3 u_2() = -u_2() \\ \dots v_2 \dots = v_2 \dots & \dots v_1 \dots = -v_1 \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1^+(|\vec{p}|/\hat{z}) \sigma^3 u_1(|\vec{p}|/\hat{z}) = u_1^+(|\vec{p}|/\hat{z}) u_1(|\vec{p}|/\hat{z}) = (\omega+m) \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{(\omega+m)^2} \right) = 2\omega \\ u_2^+ \sigma^3 u_2 = -u_2^+ u_2 = -2\omega \\ v_1^+ \sigma^3 v_1 = -v_1^+ v_1 = -2\omega \\ v_2^+ \sigma^3 v_2 = v_2^+ v_2 = 2\omega \end{cases}$$

et enfin :

$$\begin{cases} \langle \vec{p} \cdot \vec{S}(t) \rangle_{e^{-\vec{p}\cdot\vec{r}}} = \frac{1}{2} \\ \langle \vec{p} \cdot \vec{S}(t) \rangle_{e^{-\vec{p}\cdot\vec{r}}} = -\frac{1}{2} \\ \langle \vec{p} \cdot \vec{S}(t) \rangle_{e^{+\vec{p}\cdot\vec{r}}} = \frac{1}{2} \\ \langle \vec{p} \cdot \vec{S}(t) \rangle_{e^{+\vec{p}\cdot\vec{r}}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(scalaire, indépendant du repère spatial /
indépendant de $|\vec{p}|$) \Rightarrow scalaire de Lorentz)

$$\Rightarrow \begin{array}{|l|l|} \hline u_+(\vec{p}) \hat{=} u_1(\vec{p}) & v_+(\vec{p}) \hat{=} v_1(\vec{p}) \\ \hline u_-(\vec{p}) \hat{=} u_2(\vec{p}) & v_-(\vec{p}) \hat{=} v_2(\vec{p}) \\ \hline \end{array}$$

6. (i)

$$\begin{array}{|l}
 u_+(\vec{p}/\hat{z}) \sim \sqrt{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & u_-(\vec{p}/\hat{z}) \sim \sqrt{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 \hline
 v_+(\vec{p}/\hat{z}) \sim \sqrt{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & v_-(\vec{p}/\hat{z}) \sim \sqrt{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Toujours en représentation de Dirac : $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma^5 u_+(\vec{p}/\hat{z}) \sim \sqrt{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \gamma^5 v_+(\vec{p}/\hat{z}) \sim \sqrt{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \gamma^5 u_-(\vec{p}/\hat{z}) \sim \sqrt{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \gamma^5 v_-(\vec{p}/\hat{z}) \sim \sqrt{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{|l}
 \gamma^5 u_{\pm}(\vec{p}) \sim \pm u_{\pm}(\vec{p}) \\
 \gamma^5 v_{\pm}(\vec{p}) \sim \mp v_{\pm}(\vec{p})
 \end{array} \quad \begin{array}{l}
 \text{à haute énergie,} \\
 \forall \text{ représentation} \\
 \forall \hat{p}
 \end{array}$$

(ii) γ^5 hermitique, $(\gamma^5)^2 = I$

$\Rightarrow \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$ hermitiques

$$\left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm 2\gamma^5 + (\gamma^5)^2}{4} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \quad \text{idempotence}$$

$$\frac{1 + \gamma^5}{2} \frac{1 - \gamma^5}{2} = \frac{1 - \gamma^5}{2} \frac{1 + \gamma^5}{2} \quad \text{orthogonaux}$$

$$\frac{1 + \gamma^5}{2} + \frac{1 - \gamma^5}{2} = 1 \quad \text{complets}$$

$\Rightarrow \frac{1 \pm \gamma^5}{2} =$ projecteurs orthogonaux, complets

(iii)

$$\begin{array}{|l}
 \frac{1 \pm \gamma^5}{2} u_{\pm}(\vec{p}) \sim u_{\pm}(\vec{p}) & \frac{1 \mp \gamma^5}{2} u_{\pm} = 0 \\
 \frac{1 \mp \gamma^5}{2} v_{\pm}(\vec{p}) \sim v_{\pm}(\vec{p}) & \frac{1 \pm \gamma^5}{2} v_{\pm} = 0
 \end{array}$$

$$u_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} u_{\pm} \Rightarrow \bar{u}_{\pm} = u_{\pm}^{\dagger} \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \gamma^0 = u_{\pm}^{\dagger} \gamma^0 \frac{1 \mp \gamma^5}{2}$$

$$\&c... \Rightarrow \begin{array}{|l}
 \bar{u}_{\pm} \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \sim \bar{u}_{\pm} \\
 \bar{v}_{\pm} \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \sim \bar{v}_{\pm}
 \end{array}$$

(iv)

A hte. énergie hors de la géométrie avant } $\Leftrightarrow m=0$

$$\begin{array}{|l}
 \text{alors } (\not{p} - m) u(\vec{p}) = 0 \quad \rightarrow \not{p} u(\vec{p}) \rightarrow 0, \quad \bar{u}(\vec{p}) \not{p} \rightarrow 0 \\
 (\not{p} + m) v(\vec{p}) = 0 \quad \rightarrow \not{p} v(\vec{p}) \rightarrow 0, \quad \bar{v}(\vec{p}) \not{p} \rightarrow 0
 \end{array}$$

7.

$$(\epsilon'_{||} \cdot k) = \sqrt{2} N \{ (q \cdot k)(p \cdot k) - (p \cdot k)(q \cdot k) \} \Rightarrow \boxed{(\epsilon'_{||} \cdot k) = 0}$$

$$(\epsilon_{\perp} \cdot k) = \sqrt{2} N \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}_{\text{antisym.}} q_{\mu} p_{\nu} k_{\sigma} k_{\rho} \Rightarrow \boxed{(\epsilon_{\perp} \cdot k) = 0}$$

$$(\epsilon'_{||} \cdot \epsilon_{\perp}) = 2N^2 \left\{ (q \cdot k) \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}_a q_{\mu} p_{\nu} k_{\sigma} p_{\rho} - (p \cdot k) \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}_s q_{\mu} p_{\nu} k_{\sigma} q_{\rho} \right\} \Rightarrow \boxed{(\epsilon'_{||} \cdot \epsilon_{\perp}) = 0}$$

$$(\epsilon'_{||})^2 = 2N^2 \{ (q \cdot k)p - (p \cdot k)q \}^2 = 2N^2 \{ (q \cdot k)^2 p^2 - 2(q \cdot k)(p \cdot k)(p \cdot q) + (p \cdot k)^2 q^2 \} \Rightarrow \boxed{(\epsilon'_{||})^2 = -1}$$

$$(\epsilon_{\perp})^2 = 2N^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_{\mu} p_{\nu} k_{\sigma} \epsilon_{\rho\alpha\beta\gamma} q^{\alpha} p^{\beta} k^{\gamma} \Rightarrow \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\rho\alpha\beta\gamma} = ?$$

$$\epsilon_{\rho\alpha\beta\gamma} \equiv \eta_{\rho\mu} \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\sigma} \eta_{\gamma\tau} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \Rightarrow \text{antisymétrique et } \epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = -1$$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ et $\epsilon_{\rho\alpha\beta\gamma}$ non nuls si $\mu \neq \nu \neq \rho \neq \sigma$
 $\mu \neq \alpha \neq \beta \neq \gamma$

$\Rightarrow \alpha, \beta, \gamma$ et α', β', γ' pris parmi le même triplet de 3 valeurs distinctes et dans la somme sur ρ , seule contribue la valeur distincte de ces 3 valeurs

quand $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ et $\epsilon_{\rho\alpha\beta\gamma}$ ont des valeurs opposées \Rightarrow produit = -1

autres contributions obtenues par échanges des α', β', γ'

$$\Rightarrow \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\rho\alpha\beta\gamma} = -\delta_{\alpha'}^{\mu} \delta_{\beta'}^{\nu} \delta_{\gamma'}^{\sigma} + \delta_{\beta'}^{\mu} \delta_{\alpha'}^{\nu} \delta_{\gamma'}^{\sigma} - \delta_{\beta'}^{\mu} \delta_{\gamma'}^{\nu} \delta_{\alpha'}^{\sigma} + \delta_{\gamma'}^{\mu} \delta_{\beta'}^{\nu} \delta_{\alpha'}^{\sigma} - \delta_{\gamma'}^{\mu} \delta_{\alpha'}^{\nu} \delta_{\beta'}^{\sigma} + \delta_{\alpha'}^{\mu} \delta_{\gamma'}^{\nu} \delta_{\beta'}^{\sigma}$$

$$\Rightarrow (\epsilon_{\perp})^2 = 2N^2 \left\{ -q^2 p^2 k^2 + (q \cdot p)^2 k^2 - (q \cdot p)(p \cdot k)(k \cdot q) + (q \cdot k) p^2 (k \cdot q) - (q \cdot k)(p \cdot q)(k \cdot p) + q^2 (p \cdot k)(k \cdot p) \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\epsilon_{\perp})^2 = -1}$$

C'est bel et bien, mais il n'y a aucune raison (p, q, k lumineux mais par ailleurs arbitraires) pour que $\epsilon'_{||} \cdot \hat{k} = \epsilon_{\perp} \cdot \hat{k} = 0$ (spatiaux) et que $\hat{\epsilon}'_{||} \cdot \hat{k} = \hat{\epsilon}_{\perp} \cdot \hat{k} = 0$ (transverses)

Alors ? ...

Mais l'électrodynamique quantique est invariante / transformations de Lorentz \Rightarrow si il existe un repère ces conditions physiques de transversalité sont réalisées, c'est gagné!

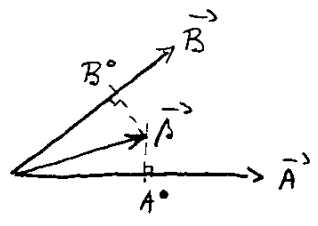
Notations + légères :

soit A, B et $K \perp q$. $A^2 = B^2 = -1, K^2 = 0$
 $(A.K) = (B.K) = (A.B) = 0$

Transf. spéciale de Lorentz en conf. standard: $t' = \gamma(t - \beta x)$
 \Rightarrow vectoriellement, c à d. dans une direction quelconque: $t' = \gamma(t - \vec{\beta} \cdot \vec{x})$
 avec $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

\Rightarrow pour nos 4-vecteurs:
$$\begin{cases} A'^0 = \gamma(A^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{A}) \\ B'^0 = \gamma(B^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{B}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists \vec{\beta} \perp q$. $A'^0 = B'^0 = 0$:
$$\begin{cases} \vec{\beta} \cdot \vec{A} = A^0 \\ \vec{\beta} \cdot \vec{B} = B^0 \end{cases}$$



et même, comme A et B sont espacés,
 $|\vec{A}| > |A^0| \Rightarrow |\vec{\beta}| < 1$
 $|\vec{B}| > |B^0|$

Dans ce repère,

$$\left. \begin{aligned} A.K &= -\vec{A}' \cdot \vec{K}' = 0 \\ B.K &= -\vec{B}' \cdot \vec{K}' = 0 \\ A.B &= -\vec{A}' \cdot \vec{B}' = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{c'est gagné}$$

8. (i) 2 4-vecteurs $A, B \Rightarrow (A.B) = \eta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ A_\mu B_\nu$
 quelconques

$\Rightarrow (A.B) = \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A)$

$$\begin{aligned} \not{A} \not{B} &= \sqrt{2} N \{ (q.k) \not{p} - (p.k) \not{q} \} \\ &= \sqrt{2} N \{ \not{p} (q.k) - (p.k) \not{q} \} \quad (\text{car on veut l'ordre } p, q) \\ &= \sqrt{2} N \frac{1}{2} \{ \not{p} \not{q} \not{k} + \not{p} \not{k} \not{q} - \not{p} \not{k} \not{q} - \not{k} \not{p} \not{q} \} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{\not{A} \not{B} = \frac{N}{\sqrt{2}} \{ \not{p} \not{q} \not{k} - \not{k} \not{p} \not{q} \}}$

(ii) $F^{\mu\nu} = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\nu \eta^{\mu\sigma} - \gamma^\mu \eta^{\nu\sigma}$
 $= (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma^\sigma + \gamma^\nu \eta^{\mu\sigma} - \gamma^\mu \eta^{\nu\sigma} - \gamma^\nu \eta^{\mu\sigma}$

$\boxed{F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}}$

de même $\boxed{F^{\nu\sigma} = -F^{\sigma\nu}}$

ça suffit (mais oui) pour $\Rightarrow \boxed{F^{\mu\nu} \text{ antisymétrique / toute transposition}}$

(iii) $F^{123} = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = (\gamma^0)^2 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^0 \frac{1}{2} \gamma^5 = \gamma^5$

$\Rightarrow \boxed{5 \gamma^{213} \gamma^5 = -i \gamma^5 \gamma^5 = -i \gamma^5 \varepsilon^{2103} \gamma^5 = -i \gamma^5 \varepsilon^{1203} \gamma^5}$

$F^{023} = \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 = -\gamma^0 (\gamma^1 \gamma^2) \gamma^3 = \gamma^1 \frac{1}{2} \gamma^5 = -i \gamma^1 \gamma^5$

$\Rightarrow F^{023} = i \gamma^1 \gamma^5 = -i \gamma^1 (-1) \gamma^5 = -i \gamma^1 \varepsilon^{2013} \gamma^5 = -i \gamma^1 \varepsilon^{1023} \gamma^5$

$F^{013} = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^0 (\gamma^2 \gamma^1) \gamma^3 = -\gamma^2 \frac{1}{2} \gamma^5 = \frac{1}{2} \gamma^2 \gamma^5$

$F^{013} = -i \gamma^2 \gamma^5 = -i \gamma^2 \varepsilon^{3102} \gamma^5 = -i \gamma^2 \varepsilon^{1013} \gamma^5$

$F^{012} = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 = -\gamma^0 (\gamma^2 \gamma^1) \gamma^3 = -\frac{1}{2} \gamma^5 \gamma^3 = -\frac{1}{2} \gamma^3 \gamma^5$

$F^{012} = i \gamma^3 \gamma^5 = -i \gamma^3 (-1) \gamma^5 = -i \gamma^3 \varepsilon^{3012} \gamma^5 = -i \gamma^3 \varepsilon^{1012} \gamma^5$

Comme $F^{\mu\nu\rho}$ antisymétrique, les autres composantes s'en déduisent par transpositions, ou alors sont nulles

$\Rightarrow \boxed{5 \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5 = -i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5}$

(iv) $\Rightarrow \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5 = \frac{1}{-i} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5 = i F^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5$

$\boxed{5 \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5 = i (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) \gamma^5}$

(v) $\not{A} = \sqrt{2} N \gamma_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\nu p_\rho k_\sigma$

$= i\sqrt{2} N \{ q^\mu p^\nu k^\rho - q^\nu (p^\mu k^\rho) + p^\mu (q^\nu k^\rho) - k^\mu (q^\nu p^\rho) \} \gamma^5$

$= i\sqrt{2} N \{ (2q^\mu p^\nu) k^\rho - (k^\mu p^\nu) q^\rho + p^\mu (q^\nu k^\rho) - (p^\mu q^\nu) k^\rho \} \gamma^5$

$= i\sqrt{2} N \{ (p^\mu q^\nu) k^\rho - p^\mu q^\nu k^\rho - \frac{1}{2} (k^\mu p^\nu + p^\mu k^\nu) q^\rho + \frac{1}{2} p^\mu (q^\nu k^\rho + k^\nu q^\rho) \} \gamma^5$

$= i\sqrt{2} N \{ (p^\mu q^\nu) k^\rho - \frac{1}{2} p^\mu q^\nu k^\rho - \frac{1}{2} k^\mu p^\nu q^\rho \} \gamma^5$

$\Rightarrow \boxed{\not{A} = -i \frac{N}{\sqrt{2}} \{ p^\mu q^\nu k^\rho + k^\mu p^\nu q^\rho - 2(p^\mu q^\nu) k^\rho \} \gamma^5}$

on souhaite l'ordre p, q

3. (i) $\not{A}'_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\not{A}'_{\parallel} \pm i \not{A}'_{\perp}) = \frac{N}{2} \{ p^\mu q^\nu k^\rho - k^\mu p^\nu q^\rho \pm [p^\mu q^\nu k^\rho + k^\mu p^\nu q^\rho - 2(p^\mu q^\nu) k^\rho] \gamma^5 \}$

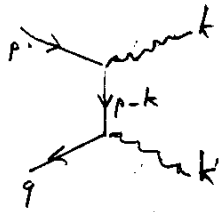
$\boxed{\not{A}'_{\pm} = N \{ p^\mu q^\nu k^\rho \frac{1 \pm \gamma^5}{2} - k^\mu p^\nu q^\rho \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \mp (p^\mu q^\nu) k^\rho \gamma^5 \}$

ii) $\not{A}'_{\pm}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\not{A}'_{\parallel} \mp i \not{A}'_{\perp}) = \not{A}'_{\mp}$!

↕ réels par def.

\Rightarrow associées aux \not{A}'_{\pm}^* : $\boxed{\not{A}'_{\pm}^* = \not{A}'_{\mp}}$

10. (i)



$$M_1 + M_2 = q^2 \bar{u}(q) \left\{ \cancel{\epsilon}^* \frac{1}{\cancel{p}-\cancel{k}-m} \cancel{\epsilon}^* + \cancel{\epsilon}^* \frac{1}{\cancel{p}-\cancel{k}'-m} \cancel{\epsilon}'^* \right\} u(\vec{p})$$

(ii) \Rightarrow contribution d'un éventuel terme additif en $\cancel{K}\gamma^5$ dans $\cancel{\epsilon}^*$ (dans l'approximation $m=0$):

$$\begin{aligned} & q^2 \bar{u}(q) \left\{ \cancel{\epsilon}^* \frac{1}{\cancel{p}-\cancel{k}} \cancel{K}\gamma^5 + \cancel{K}\gamma^5 \frac{1}{\cancel{p}-\cancel{k}'} \cancel{\epsilon}'^* \right\} u(\vec{p}) \\ &= q^2 \bar{u}(q) \left\{ \cancel{\epsilon}^* \frac{1}{\cancel{p}-\cancel{k}} (-\cancel{p}+\cancel{k}+\cancel{p})\gamma^5 + (\cancel{k}-\cancel{q}+\cancel{q})\gamma^5 \frac{1}{\cancel{k}-\cancel{q}} \cancel{\epsilon}'^* \right\} u(\vec{p}) \\ &= q^2 \bar{u}(q) \left\{ -\cancel{\epsilon}^* \gamma^5 - \cancel{\epsilon}^* \frac{1}{\cancel{p}-\cancel{k}} \gamma^5 \cancel{p} + \cancel{q} \gamma^5 \frac{1}{\cancel{k}-\cancel{q}} \cancel{\epsilon}'^* - \gamma^5 (\cancel{k}-\cancel{q}) \frac{1}{\cancel{k}-\cancel{q}} \cancel{\epsilon}'^* \right\} u(\vec{p}) \\ & \quad \left(\begin{array}{l} \bar{u}(q) \cancel{p} = 0 \\ \Rightarrow u(\vec{p}) = 0 \end{array} \right) \\ &= q^2 \bar{u}(q) \left\{ -\cancel{\epsilon}^* \gamma^5 - \gamma^5 \cancel{\epsilon}'^* \right\} u(\vec{p}) \\ &= 0 \quad \text{c.p.f.d.} \end{aligned}$$

Attention: ceci n'est vrai que dans l'approximation $m=0$. (Par contre il est facile de voir qu'un terme \cancel{K} ne donne aucune contribution, quelle que soit m).

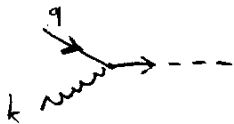
Il en va de même quel que soit le graphe: un facteur $\cancel{K}\gamma^5$ attaché à une ligne de photon externe et à son vertex ne donne aucune contribution au processus (à condition d'additionner tous les graphes équivalents, différant par les échanges de lignes de photons externes), dans la limite $m=0$.

C'est facile à vérifier pour e^- et $\rightarrow \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$. C'est plus difficile à démontrer en général (et s'il y a des boucles il faut renormaliser).

\Rightarrow on peut prendre

$$\cancel{\epsilon}_{\pm} = N \left\{ \cancel{p} \cancel{q} \cancel{K} \frac{1 \pm \gamma^5}{2} - \cancel{K} \cancel{p} \cancel{q} \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \right\}$$

11. (i)

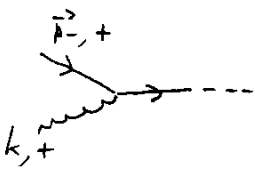


$$\Rightarrow \dots \cancel{\epsilon}_{\pm}(k) u(q) = \dots N \left\{ \cancel{p} \cancel{q} \cancel{K} \frac{1 \pm \gamma^5}{2} - \cancel{K} \cancel{p} \cancel{q} \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \right\} u(q)$$

\Rightarrow la contribution du terme $\cancel{K} \cancel{p} \cancel{q} \frac{1 \mp \gamma^5}{2}$ est nulle

$$\underbrace{\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \cancel{q}}_{\rightarrow 0}$$

(ii)



$$\Rightarrow \dots \cancel{\epsilon}_{+}(k) u_{+}(p) = \dots N \left\{ \cancel{p} \cancel{q} \cancel{K} \frac{1 + \gamma^5}{2} - \cancel{K} \cancel{p} \cancel{q} \frac{1 - \gamma^5}{2} \right\} \frac{1 + \gamma^5}{2} u_{+}(p)$$

$\Rightarrow \forall$ le choix de p et q , par le jeu des projecteurs, un des deux termes dans $\cancel{\epsilon}_{\pm}$ donne une contribution nulle.

(ii)

$$\mathcal{M}_1(+-, ++)= \frac{g^2}{t} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{\epsilon}_-(k_2) (\not{p}-\not{k}_1) \not{\epsilon}_-(k_1) u_-(\vec{p}_-)$$

$$= \frac{g^2}{t} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \frac{1+\gamma^5}{2} N_2 \{ \not{p}_2 \not{p}_2 \not{k}_2 \frac{1-\gamma^5}{2} \} (\not{p}-\not{k}_1) N_1 \dots$$

il suffit de choisir $p_2 \hat{=} p_+$
alors $\bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{p}_+ = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_1(+-, ++)=0}$$

$$\mathcal{M}_2(+-, ++)= \frac{g^2}{u} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \frac{1+\gamma^5}{2} N_1 \{ \not{p}_1 \not{p}_1 \not{k}_1 \frac{1-\gamma^5}{2} \} (\not{p}-\not{k}_2) \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_2(+-, ++)=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{M(+-, ++)=0} \quad \text{1 amplitude nulle}$$

et par réflexion :

$$\boxed{M(-+, --)=0} \quad \text{1 amplitude nulle}$$

$$\mathcal{M}_1(-+, ++)= \dots N_1 \{ -\not{k}_1 \not{p}_1 \not{p}_2 \frac{1+\gamma^5}{2} \} \frac{1+\gamma^5}{2} u_+(\vec{p}_+)$$

choix $q_1 \hat{=} p_- \Rightarrow \not{p}_- u_+(\vec{p}_+) = 0$

et de même pour $\mathcal{M}_2(-+, ++)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} M(-+, ++)=0 \\ M(+-, --)=0 \end{matrix}}$$

2 amplitudes en moins
(il n'en reste que 4)

(iii)

$$\mathcal{M}_1(+-, +-)= \frac{g^2}{t} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{\epsilon}_+(k_2) (\not{p}-\not{k}_1) \not{\epsilon}_-(k_1) u_-(\vec{p}_-)$$

$$= \frac{g^2}{t} \bar{v}_+(\vec{p}_+) N_2 \{ -\not{k}_2 \not{p}_2 \not{p}_2 \frac{1-\gamma^5}{2} \} (\not{p}-\not{k}_1) N_1 \{ \not{p}_1 \not{p}_1 \not{k}_1 \frac{1-\gamma^5}{2} \} u_-(\vec{p}_-)$$

$$= -\frac{g^2}{t} N_2 N_1 \bar{v}_+(\vec{p}_+) \{ [2(k_2 \cdot p_+) - \not{p}_+ \not{k}_2] \not{p}_- \} (\not{p}-\not{k}_1) \{ \not{p}_+ [2(p_- \cdot k_1) - \not{k}_1 \not{p}_-] \} u_-(\vec{p}_-)$$

$$= -\frac{g^2}{t} N_2 N_1 4(k_2 \cdot p_+) (p_- \cdot k_1) \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{p}_- (\not{p}-\not{k}_1) \not{p}_+ u_-(\vec{p}_-)$$

$$\underbrace{\not{p}_- \not{p}_+}_{= p^2 = 0} = 0$$

$$= \frac{g^2}{t} N_2 N_1 4(p_+ \cdot k_2) (p_- \cdot k_1) \underbrace{\bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{p}_- \not{k}_1 \not{p}_+}_{=0} u_-(\vec{p}_-)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{x} \not{k}_1 \not{x} u_-(\vec{p}_-) &= \bar{v}_+(\vec{p}_+) \left\{ [2(p \cdot k_1) - \not{k}_1 \not{x}] \not{x} u_-(\vec{p}_-) \right. \\ &= -\bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 [2(p \cdot p_+) - \not{x} \not{x}] u_-(\vec{p}_-) \\ &= -2(p \cdot p_+) \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 u_-(\vec{p}_-) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(+, -, +) &= \frac{-g^2}{t} N_2 N_2 8 (p_+ \cdot k_2) (p_- \cdot k_1) (p_+ \cdot p_-) \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 u_-(\vec{p}_-) \\ &= \frac{g^2}{2(p \cdot k_1)} \frac{8 (p_+ \cdot k_2) (p_- \cdot k_1) (p_+ \cdot p_-)}{2\sqrt{(p_+ \cdot p_-)} (p_+ \cdot k_2) (p_- \cdot k_1)} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 u_-(\vec{p}_-) \\ &= g^2 \frac{(p_- \cdot k_1)}{\sqrt{(p_- \cdot k_1) (p_- \cdot k_2) (p_- \cdot k_2) (p_- \cdot k_1)}} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 u_-(\vec{p}_-) \\ &= g^2 \frac{1}{(p_- \cdot k_2)} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 u_-(\vec{p}_-) \end{aligned}$$

grâce à $\begin{cases} (p_+ \cdot k_2) = (p_- \cdot k_1) \\ (p_- \cdot k_2) = (p_+ \cdot k_1) \end{cases}$

$$\boxed{\mathcal{M}_2(+, -, +) = -\frac{2g^2}{u} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 u_-(\vec{p}_-)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(+, -, +) &= \frac{g^2}{u} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{x} (\not{k}_1) (p_- - \not{k}_2) \not{x} (\not{k}_2) u_-(\vec{p}_-) \\ &= \frac{g^2}{u} \bar{v}_+(\vec{p}_+) N_2 \left\{ \not{x} \not{x} \not{k}_1 \frac{1-\gamma^5}{2} \right\} (p_- - \not{k}_2) \dots \end{aligned}$$

\uparrow
 p_+

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_2(+, -, +) = 0}$$

$$\boxed{M(+, -, +) = -\frac{2g^2}{u} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 u_-(\vec{p}_-)}$$

13.

(i) $|M(+, -, +)|^2 = 4 \frac{g^4}{u^2} \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 u_-(\vec{p}_-) \bar{u}_-(\vec{p}_-) \not{k}_1 v_+(\vec{p}_+)$

$$\boxed{|M(+, -, +)|^2 = 4 \frac{g^4}{u^2} \text{Tr} \left\{ v_+(\vec{p}_+) \bar{v}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 u_-(\vec{p}_-) \bar{u}_-(\vec{p}_-) \not{k}_1 \right\}}$$

(ii) $\sum_{\lambda} u_{\lambda}(\vec{p}_-) \bar{u}_{\lambda}(\vec{p}_-) = \not{x} + m \sim \not{x}$ à l'tc. énergie hors avant/arrière

$$\frac{1+\gamma^5}{2} \sum_{\lambda} u_{\lambda}(\vec{p}_-) \bar{u}_{\lambda}(\vec{p}_-) = \frac{1+\gamma^5}{2} \not{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{\pm}(\vec{p}_-) \bar{u}_{\pm}(\vec{p}_-) = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \not{x}}$$

$$+ \sum_{\lambda} v_{\lambda}(\vec{p}_-) \bar{v}_{\lambda}(\vec{p}_-) = \not{x} - m \sim \not{x} \Rightarrow \boxed{v_{\pm}(\vec{p}_-) \bar{v}_{\pm}(\vec{p}_-) = \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \not{x}}$$

(iii)

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ \bar{u}_+(\vec{p}_+) \bar{u}_+(\vec{p}_+) \not{k}_1 u_-(\vec{p}_-) \bar{u}_-(\vec{p}_-) \not{k}_1 \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \frac{1-\gamma^5}{2} \not{p}_+ \not{k}_1 \frac{1-\gamma^5}{2} \not{p}_- \not{k}_1 \right\} = \text{Tr} \left\{ \frac{1-\gamma^5}{2} \not{p}_+ \not{k}_1 \not{p}_- \not{k}_1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (1-\gamma^5) \not{p}_+ \not{k}_1 [2(p \cdot k_1) - \not{k}_1 \not{p}_-] \right\} = (p \cdot k_1) \text{Tr} \left\{ (1-\gamma^5) \not{p}_+ \not{k}_1 \right\} \\ & \quad \xrightarrow{k_1^2 = k_1'^2 = 0} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr} \{ \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \} ? \\ \text{si } \mu = \nu, \gamma^\mu \gamma^\nu \propto \mathbb{I} \Rightarrow \text{Tr} \{ \gamma^5 \mathbb{I} \} = 0 \\ \text{si } \mu \neq \nu, \gamma^\mu \gamma^\nu = i \gamma^{\lambda \rho} \gamma^\mu \gamma^\nu \propto \gamma^\rho \gamma^\lambda \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \rho \neq \mu, \nu \\ \lambda \neq \mu, \nu, \rho \end{array} \right. \\ \rightarrow \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\lambda \} \propto \eta^{\mu\lambda} = 0 \\ \Rightarrow \text{Tr} \{ \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 0 \end{array} \right.$$

$$= (p \cdot k_1) \text{Tr} (\not{p}_+ \not{k}_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr} (\not{a} \not{b}) = a_\mu b_\nu \text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) = a_\mu b_\nu \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ \right\} \\ = \frac{1}{2} a_\mu b_\nu 2 \eta^{\mu\nu} \text{Tr} (\mathbb{I}_4) \\ = 4 (a \cdot b) \end{array} \right.$$

$$= 4(p \cdot k_1) (p_+ \cdot k_1) = 4(p \cdot k_1) (p \cdot k_2) = t u$$

$$\Rightarrow |M(+-, +-)|^2 = 4g^4 \frac{t}{u} = |M(-+, -+)|^2 \quad \text{par réflexion}$$

(iv)

Evidemment, la probabilité du processus ne dépend pas des numéros attribués aux photons (autrement dit, et heureusement, la sommation sur les graphes d'échange implique la symétrie $1 \leftrightarrow 2$). Donc:

$$\left| M \left(\begin{array}{cc} \vec{p}_+ & \vec{p}_- \\ + & - \end{array}, \begin{array}{cc} \vec{k}_1 & \vec{k}_2 \\ - & + \end{array} \right) \right|^2 = \left| M \left(\begin{array}{cc} \vec{p}_+ & \vec{p}_- \\ + & - \end{array}, \begin{array}{cc} \vec{k}_2 & \vec{k}_1 \\ + & - \end{array} \right) \right|^2$$

calculé juste au dessus + échange $k_1 \leftrightarrow k_2$
(mais pas des hélicités)
c.à.d. échange $t \leftrightarrow u$

$$\Rightarrow |M(+-, -+)|^2 = 4g^4 \frac{u}{t} = |M(-+, +-)|^2$$

c'est fini, on a calculé toutes les 16 amplitudes (ou plutôt leurs modules carrés)!

$$14. (i) \quad \overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\lambda_+ \lambda_- \\ \lambda_1 \lambda_2}} |M(\lambda_+, \lambda_-, \lambda_1, \lambda_2)|^2 = \frac{1}{4} 2 \cdot 4 q^4 \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right)$$

$$\boxed{\overline{|M|^2} = 2 q^4 \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right)}$$

$$(ii) \quad \frac{d^2 \sigma}{d^2 k_1} = \frac{1}{16 (2\pi)^2} \frac{1}{s \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{s}}} \overline{|M|^2} \underset{s \gg m^2}{\sim} \frac{1}{16 (2\pi)^2} \frac{1}{s} \overline{|M|^2}$$

$$= \frac{q^4}{8 (2\pi)^2} \frac{1}{s} \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{s} \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right)$$

$$\boxed{\frac{d^2 \sigma}{d^2 k_1} = \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{s} \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right)}$$

à hte. énergie, dans le c.m.
hors avant/arrière

$$= \alpha^2 \frac{1}{4(p_- \cdot p_+)} \left(\frac{p_- \cdot k_1}{p_- \cdot k_2} + \frac{p_- \cdot k_2}{p_- \cdot k_1} \right) \quad \text{avec} \begin{cases} \vec{p}_+ = -\vec{p}_- \\ \vec{k}_2 = -\vec{k}_1 \end{cases}$$

(iii) Puisque cette expression n'est pas valide dans les directions avant/arrière, elle ne peut être intégrée sur toutes les directions k_1 pour obtenir σ .

On s'en aperçoit d'ailleurs car cette intégrale diverge dans les directions $k_1 = \hat{p}_-$ et $k_1 = -\hat{p}_-$.

Epilogue

Je n'ai pas le courage de retranscrire le calcul de $e^+ e^- \rightarrow \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ (6 graphes, $2^5 = 32$ amplitudes!), mais je vous promets que je saisis le faire aussi bien que vous maintenant, et que ça n'est vraiment pas compliqué.

Référence

R. Gastmans & Tai Tsun Wu, The Ubiquitous Photon, Helicity Methods for QED and QCD, Clarendon Press (Oxford 1990).

En manière d'au revoir...

Ce sujet était certes un peu calculatoire, raison pour laquelle j'éprouve d'autant plus de chagrin que les quelques questions plus ouvertes n'aient pratiquement 'brouté' (et été tentées par) personne.

La subjectivité est inhérente à la forme de ce genre d'épreuve. Mais, après tout, que mesure au juste (et avec une telle précision!) le barème dit "objectif" d'un examen orthodoxe en temps limité de quatre heures? Parvenant encore - pour combien de temps? - à distinguer les sexes, j'ai à l'évidence consacré mes forces déclinantes à hisser les jeunes filles aux premières places... Non, sans rire, elles étaient globalement plus vives. Peut-être une plus grande résistance aux alcools, au manque de sommeil ou à l'intoxication alimentaire.

Pour vous consoler des heures gaspillées, dans la fleur de l'âge, sur cet immonde sujet, voici une estimation du temps que j'y ai moi-même consacré:

- recherche d'idées, essais, préparation du sujet \approx 50 heures,
- correction \approx 20 heures
- oraux \approx 20 heures
- rédaction du corrigé \approx 7 heures.

Vous concevrez donc sans peine que vos enseignants sont prêts à abandonner cette forme d'examen si vous estimez qu'elle avantage indûment les candidates...

