

- 1 Deux opérateurs satisfont la relation $[A, B] = i$. Soit $A|a\rangle = a|a\rangle$.
1. Calculer $A(1 - iBd\omega)|a\rangle$ au premier ordre en $d\omega$ (petit).
 2. Que peut-on dire de $e^{-iB\omega}|a\rangle$?
- 2 Pour des directions et sens bien particuliers de leurs axes d'espace et de temps, les coordonnées utilisées respectivement par Ada et Van pour désigner les événements sont reliées par

$$\begin{aligned}t' &= \gamma(t - vx) \\x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z,\end{aligned}$$

avec $\gamma \stackrel{\text{df}}{=} (1 - v^2)^{-1/2}$, et $v =$ vitesse (de qui/qui au fait ?).

1. Vous croyez à l'invariance par rotation. Saurez-vous en in(/dé)duire une écriture vectorielle donnant t' et \mathbf{r}' en fonction de t , \mathbf{r} et \mathbf{v} , indépendamment des directions des axes d'espace ?
 2. En déduire les valeurs des éléments $\Lambda^\mu{}_\nu$ de la matrice de transformation correspondante en fonction des composantes v_i .
 3. A l'aide de cette expression, vérifier explicitement que le produit de deux transformations spéciales de Lorentz orthochrones est encore une transformation orthochrone.
- 3 Calculer chacun des coefficients $\Lambda^{-1\mu}{}_\nu$ de la matrice inverse d'une transformation de Lorentz dont les coefficients sont $\Lambda^\mu{}_\nu$.

- 4 Soit un tenseur $T_{\alpha\beta}$ et les quantités, définies dans chaque repère : $A \stackrel{\text{df}}{=} T^\alpha{}_\alpha$, $A' \stackrel{\text{df}}{=} T'^\alpha{}_\alpha$, etc. Montrer que A , A' , etc. sont les composantes d'un tenseur.

- 5 On se propose de démontrer une propriété qui — quoique fréquemment invoquée — l'est rarement, à savoir que toute transformation de Lorentz, homogène, propre, orthochrone, peut être considérée comme produit d'une transformation spéciale de Lorentz et d'une rotation.

Soit une transformation de Lorentz homogène, etc., de matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$.

1. Montrer que $(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^0{}_i)^2 = 1$.
2. On définit les trois quantités $v_i \stackrel{\text{df}}{=} \Lambda^0{}_i / \Lambda^0{}_0$.
(i) Montrer que $\mathbf{v}^2 \leq 1$.
(ii) En déduire que les v_i peuvent être adoptés comme valeurs des paramètres d'une transformation spéciale de Lorentz.
3. Soit un système de coordonnées t', x', y', z' et un autre système de coordonnées, t, x, y, z qui se déplace à une vitesse \mathbf{v} par rapport à celui-là.
(i) Rappeler la forme vectorielle (cf. exercice 2)

$$\begin{aligned}t' &= t'_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{r})\end{aligned}$$

de la transformation de Lorentz entre ces systèmes.

(ii) En déduire que la matrice de cette transformation est de la forme :

$$(L^\mu{}_\nu(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} L^0{}_0 & (L^0{}_j) \\ (L^i{}_0) & (L^i{}_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & (\gamma v_j) \\ (\gamma v_i) & \left(\delta_{ij} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_i v_j\right) \end{pmatrix}.$$

4. Calculer les coefficients γ et γv_i de cette matrice en fonction des $\Lambda^\mu{}_\nu$, lorsque \mathbf{v} a la valeur définie à la question 2.

5. Soit la matrice $R \stackrel{\text{df}}{=} \Lambda L(-\mathbf{v})$.

(i) Calculer $R^0{}_0$.

(ii) En déduire les valeurs des $R^0{}_i$ et $R^i{}_0$. (Un conseil : ne pas oublier que, de par sa définition, la matrice R appartient au groupe des matrices Λ et satisfait donc les propriétés montrées à la question 1.)

(iii) Quelle est la nature de la transformation correspondant à R ?

6. Quel est le résultat du produit $RL(\mathbf{v})$?

7. On se propose de montrer que cette décomposition d'une transformation de Lorentz, en transformation spéciale puis rotation pure, est unique. Imaginons deux rotations, R et R' , et deux transformations spéciales de Lorentz, $L(\mathbf{v})$ et $L(\mathbf{v}')$, telles que $\Lambda = RL(\mathbf{v}) = R'L(\mathbf{v}')$.

(i) Montrer que $R^{-1}R'L(\mathbf{v}')L(-\mathbf{v}) = I$.

(ii) Montrer que l'élément 0_0 de cette relation matricielle fournit une condition liant \mathbf{v} , γ , \mathbf{v}' et γ' .

(iii) Quelle condition doivent satisfaire \mathbf{v} et \mathbf{v}' pour que celle-ci soit réalisée ?

(iv) En déduire que $L(\mathbf{v}') = L(\mathbf{v})$ et $R' = R$.

6 Soit un tenseur $T_{\alpha\beta\gamma}$.

1. Montrer que les A_α définis dans chaque repère par $A_\alpha \stackrel{\text{df}}{=} T_{\alpha\beta}{}^\beta$, sont composantes d'un quadri-vecteur.

2. Montrer que $A_\alpha = T_{\alpha\beta}{}^\beta$.

7 Soient deux champs classiques quadri-vectoriels $A_\mu(x^\nu)$ et $j_\mu(x^\nu)$, et les champs tensoriels

$$F^{\mu\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

$$*F^{\mu\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}.$$

Tous ces champs sont couplés par les équations du mouvement

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \\ \partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0 \end{cases}.$$

1. Une question sémantique pour commencer. Quels sont les statuts respectifs de chacun de ces champs : variables dynamiques, champs externes, ou champs auxiliaires ?

2. Etant donné un champ $\omega(x^\nu)$,

(i) ... quelles sont les conséquences de la transformation

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu \stackrel{\text{df}}{=} A_\mu + \partial_\mu \omega \quad ?$$

(ii) Est-on bien justifiés de qualifier A_μ de quadri-vecteur ?

(iii) Calculer $\partial_\mu j^\mu$.

3. Soient les champs

$$E_i \stackrel{\text{df}}{=} -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i,$$

$$B_i \stackrel{\text{df}}{=} \varepsilon_{ijk} \partial_j A^k.$$

(i) Pourquoi peut-on se permettre de les qualifier de (tri)vectoriels ?

(ii) Sont-ils composantes de champs quadri-vectoriels ?

(iii) Ecrire les tableaux des composantes de $F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$ et $*F^{\mu\nu}$ en fonction des composantes E_i et B_i .

4. En déduire les équations du mouvement des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , couplés à j^0 et \mathbf{j} .

5. Colin se déplace à vitesse $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{1}}$ dans le repère de Chloé qui était utilisé jusqu'à présent. Tous deux utilisent par ailleurs des "axes parallèles".

(i) Ecrire la matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$ qui permet de calculer les coordonnées x'^μ attribuées par Colin à un événement qui, pour Chloé, a les coordonnées x^μ .

(ii) En déduire les composantes des champs E'_i et B'_i en fonction des E_i et B_i , ainsi que les composantes j'^0 et j'^i en fonction des j^0 et j^i .

6. Une particule obéit à l'équation du mouvement

$$\frac{d}{d\tau}p^\alpha = \frac{q}{m}F^{\alpha\beta}p_\beta.$$

Quelles équations en déduisez-vous pour dp^0/dt et $d\mathbf{p}/dt$?

8 Soit $U(da) = 1 - iPda$ l'expression de l'opérateur représentant une translation infinitésimale, da , le long d'un axe donné, dans l'espace des états d'un système quantique. Montrer que P est hermitique, et calculer $U(a)$ représentant une translation finie.

9 Montrer qu'entre deux états propres des générateurs des translations P_μ d'un champ quantique, on a, pour l'opérateur de champ φ , la relation :

$$\langle \underline{p} | \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3) | \underline{p}' \rangle = e^{i(\underline{p} - \underline{p}') \cdot \underline{x}} \langle \underline{p} | \varphi(0, 0, 0, 0) | \underline{p}' \rangle.$$

10 Soient les tenseurs $S_{\alpha\beta}$ et $A_{\alpha\beta}$, tels que $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$ et $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$.

1. Montrer que $S_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = 0$.

2. En déduire que, pour un tenseur $T_{\alpha\beta}$ quelconque, on a,

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}S_{\alpha\beta}(T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}), \\ A_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}(T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}). \end{aligned}$$

11 Soit une transformation de Lorentz infinitésimale de matrice $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu$. Montrer que la transformation inverse a pour matrice : $\Lambda^{-1\mu}{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \varepsilon^\mu{}_\nu$.

12 On sait maintenant qu'à une théorie de champ invariante par translation de temps, correspond la constante du mouvement

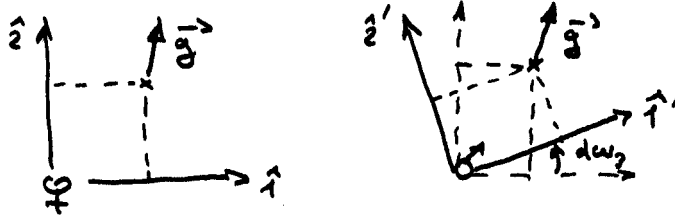
$$P_0 \stackrel{\text{df}}{=} \int d^3\mathbf{x} (\pi\partial_0\phi - \mathcal{L}).$$

Il est donc tout naturel de baptiser cette grandeur *énergie du champ*, ce qui fixe sa dimension.

En déduire les dimensions de la densité lagrangienne \mathcal{L} et de l'action S , dans le système d'unités fondamentales à base : (i) d'énergie, (ii) de longueur.

13 Dans le monde euclidien :

1. Ecrire les lois de transformation des composantes d'une grandeur physique vectorielle \mathbf{g} au cours d'une transformation de repère en rotation infinitésimale ($d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3$).



2. En déduire la matrice 3×3 , S , correspondante, et les trois matrices Σ^{12} , Σ^{23} et Σ^{31} caractérisant le comportement de cette grandeur au cours des rotations.

3. Vous avez déjà rencontré, en théorie quantique “non-relativiste”, des objets à deux composantes — les spineurs de Pauli — qui, au cours des rotations d'axe $\hat{\omega}$, angle ω , se transforment selon la loi

$$\begin{pmatrix} \chi'_1 \\ \chi'_2 \end{pmatrix} = e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{2}} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}.$$

Répondez aux questions précédentes pour ces objets (au lieu de \mathbf{g}).

14 Dans le monde einsteinien : Déterminer explicitement les six matrices $\Sigma^{\mu\nu}$ caractérisant le comportement d'une grandeur quadri-vectorielle au cours des transformations de Lorentz.15 Quelle est l'expression de l'opérateur $U = 1 - \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ — représentant les transformations de Lorentz infinitésimales dans l'espace des états d'un système quantique — dans le cas d'une rotation pure d'angle $d\theta$, autour de l'axe $\hat{\mathbf{z}}$.

16 Courants de Noether.

1. Rappeler l'expression de la variation δS de l'action, en fonction(nelle) des variations dx^α des coordonnées et $\delta\mathcal{L}$ de la densité lagrangienne.

2. Les transformations envisagées sont continues, paramétrées par les ω_i . A chaque paramètre ω_i correspond un courant $\mathcal{J}_{(i)}^\mu$ défini par :

$$\delta S = -d\omega_i \int d^4\underline{x} \partial_\mu \mathcal{J}_{(i)}^\mu.$$

Les transformations ne sont pas nécessairement des symétries de la théorie. Calculer $\partial_\mu \mathcal{J}_{(i)}^\mu$ en fonction des dérivées des coordonnées et de \mathcal{L} par rapport à ω_i .

3. Que devient $\partial_\mu \mathcal{J}_{(i)}^\mu$ dans le cas particulier d'une transformation dont le jacobien vaut 1 ?

17 Ecrire explicitement les composantes \mathcal{M}^{0ij} des courants conservés $\mathcal{M}^{\mu\nu\rho}$ associés à l'invariance par rapport aux rotations, en fonction de π , φ , et des dérivées de φ .

18 Dans le cas d'un champ φ scalaire. . .

1. Calculer la divergence des courants

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\rho} \stackrel{\text{df}}{=} x^\nu \Theta^{\mu\rho} - x^\rho \Theta^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \Sigma^{\nu\rho} \varphi,$$

où les $\Theta^{\mu\rho}$ sont les quatre quadri-courants conservés associés à l'invariance par translations d'espace-temps,

$$\Theta^\mu{}_\rho \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\rho \varphi - \mathcal{L} \delta^\mu_\rho.$$

2. Montrer que la conservation des courants $\mathcal{M}^{\mu\nu\rho}$ implique que les courants d'impulsion-énergie $\Theta^{\mu\rho}$ constituent un tenseur symétrique.

3. Ce sera effectivement le cas du tenseur $\Theta^{\mu\rho}$ d'un champ scalaire. Mais, de toute façon, le courant d'impulsion n'est pas unique. Si $\chi^{\lambda\mu\nu}$ est un champ tensoriel tel que $\chi^{\mu\lambda\nu} = -\chi^{\lambda\mu\nu}$, montrer que les $T^{\mu\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda \chi^{\lambda\mu\nu}$ sont des courants d'impulsion-énergie tout aussi acceptables que $\Theta^{\mu\nu}$ (courants conservés, dont les valeurs de constantes du mouvement associées sont les mêmes) mais qui, par un choix convenable des $\chi^{\lambda\mu\nu}$, peuvent être construits symétriques.

19 Soit

$$\Theta^\mu{}_\rho \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\rho \varphi - \mathcal{L} \delta^\mu_\rho,$$

les courants conservés associés à l'invariance par translations, et

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\rho} \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{J}^{\mu\nu\rho} + \mathcal{F}^{\mu\nu\rho},$$

les courants conservés associés à l'invariance de Lorentz, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\mu\nu\rho} &\stackrel{\text{df}}{=} x^\nu \Theta^{\mu\rho} - x^\rho \Theta^{\mu\nu} \\ \mathcal{F}^{\mu\nu\rho} &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \Sigma^{\nu\rho} \varphi \end{aligned} .$$

1. Calculer $\mathcal{F}^{\mu\nu\rho} + \mathcal{F}^{\mu\rho\nu}$.
2. Soit $f^{\lambda\mu\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} (\mathcal{F}^{\lambda\mu\nu} + \mathcal{F}^{\mu\nu\lambda} + \mathcal{F}^{\nu\mu\lambda})$. Calculer $f^{\lambda\mu\nu} + f^{\mu\lambda\nu}$.
3. Soit $A^{\mu\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$. Calculer $\partial_\mu A^{\mu\nu}$ et $A^{\mu\nu} - A^{\nu\mu}$.
4. Soit $T^{\mu\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \Theta^{\mu\nu} + A^{\mu\nu}$. Calculer $\partial_\mu T^{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}$ et $\int d^3\mathbf{x} T^{0\nu}$. Récapitulation ?
5. Soit $M^{\mu\nu\rho} \stackrel{\text{df}}{=} x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu}$. Calculer $\partial_\mu M^{\mu\nu\rho}$ et $M^{\mu\nu\rho} + M^{\mu\rho\nu}$.
6. Calculer $\int d^3\mathbf{x} M^{00k}$ et $\int d^3\mathbf{x} M^{0jk}$. Récapitulation ?

Références :

- F.J. BELINFANTE, *On the spin angular momentum of mesons*, Physica **6** (1939) 887.
- H.C. OGANIAN, *What is spin ?*, Am. J. Phys. **54** (1986) 500.

20 Des constantes dont on ne parle guère.

1. Quelle est l'expression de la prétendue constante K_x associée à l'invariance, d'une théorie de champ scalaire, par rapport aux transformations spéciales de Lorentz le long de l'axe $\hat{\mathbf{x}}$?

Ecrire K_x en fonction du temps t , de la composante P^x de l'impulsion du champ, et de la densité d'énergie de celui-ci, $\mathcal{E}(x^\mu) \stackrel{\text{df}}{=} \Theta^{00}$.

2. Une particule libre a pour impulsion \mathbf{P} , énergie E , et position $\mathbf{x}(t)$. Montrer que la quantité $\mathbf{P}t - \mathbf{x}E$ est trivialement constante.

3. Dans le cas d'un champ, montrer à l'aide de l'expression trouvée pour K_x (question 1), que l'on a :

$$\frac{d}{dt} K_x = P^x + \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} x \partial_i \Theta^{i0}.$$

Dans quelles conditions a-t-on effectivement $dK_x/dt = 0$?

21 Montrer que le choix de commutateurs isochrones

$$\begin{aligned} [\varphi(x^\mu), \pi(x'^\mu)]^- &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\varphi(x^\mu), \varphi(x'^\mu)]^- &= [\pi(x^\mu), \pi(x'^\mu)]^- = 0, \end{aligned}$$

entraîne que les quatre opérateurs

$$P_\nu \stackrel{\text{df}}{=} \int d^3\mathbf{x}' \Theta^0_\nu(x'^\mu) = \int d^3\mathbf{x}' \left\{ \pi(x'^\mu) \partial_\nu \varphi(x'^\mu) - \delta^0_\nu \mathcal{L}(\dots(x'^\mu)) \right\}$$

satisfont les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} [P_\nu, \varphi] &= -i\partial_\nu \varphi, \\ [P_\nu, \pi] &= -i\partial_\nu \pi. \end{aligned}$$

22 Montrer que le choix d'anticommutateurs isochrones

$$\begin{aligned} [\varphi(x^\mu), \pi(x'^\mu)]_+^- &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\varphi(x^\mu), \varphi(x'^\mu)]_+^- &= [\pi(x^\mu), \pi(x'^\mu)]_+^- = 0, \end{aligned}$$

implique tout aussi bien, tout au moins pour les composantes spatiales :

$$\begin{aligned} [P_k, \varphi] &= -i\partial_k \varphi, \\ [P_k, \pi] &= -i\partial_k \pi. \end{aligned}$$

23 Une vérification.

1. Rappeler l'expression de la constante du mouvement M^{0i} pour un champ scalaire.
2. En faisant choix de commutateurs canoniques aux temps égaux, calculer le commutateur $[M^{0i}, \varphi(x^\mu)]$, et vérifier qu'il satisfait bien la condition nécessaire pour que M^{0i} soit un générateur de transformations spéciales de Lorentz.
3. En se plaçant dans les conditions effectives de constance trouvées à la fin de l'exercice **20**, calculer le commutateur de M^{0i} avec l'hamiltonien.

24 Quelles équations du mouvement (sont-elles seulement dignes de ce nom ?) obtient-on pour les champs φ scalaires hermitiques des théories suivantes :

1. $\mathcal{L}_1 = a_\mu \partial^\mu \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$, où $\{a_\mu\}$ est un paramètre quadri-vectériel ?
2. $\mathcal{L}_2 = a_\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \partial^\mu \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3) - V(\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3))$, où $\underline{a}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ est un champ externe quadri-vectériel, et V est une fonction à valeur scalaire réelle ?
3. $\mathcal{L}_3 = \frac{1}{4} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$?
4. $\mathcal{L}_4 = a \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + b \varphi^2 + c$, où a, b et c sont des paramètres scalaires ?

25 Soit la théorie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 + a \varphi,$$

où a et m sont des paramètres scalaires.

1. Quelle est l'équation du mouvement du champ $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$?
2. Montrer, sur l'équation du mouvement, aussi bien que sur la densité lagrangienne, que cette théorie est équivalente à la théorie $a = 0$ lorsque $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ est additionné d'une constante — une "translation de champ" — à déterminer.

26 Reconstituer entièrement le raisonnement conduisant à l'expression de la décomposition modale du champ scalaire hermitique $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ dans une caisse périodique.

27 Algèbre des opérateurs $a_{\mathbf{k}}$.

1. Montrer que les opérateurs $a_{\mathbf{k}}$ intervenant comme amplitudes dans les développements en modes de $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ et $\pi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ sont donnés, en général, par

$$a_{\mathbf{k}} = \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2\omega\mathcal{V}}} \{ \omega\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3) + i\pi(x^0, x^1, x^2, x^3) \}.$$

2. Calculer les commutateurs correspondants $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}]$ et $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger]$, dans l'hypothèse de commutateurs aux temps égaux pour φ et π .

28 Autre développement en modes.

1. Déterminer, en fonction de $\varphi(x^\nu)$ et $\pi(x^\nu)$, l'expression de l'opérateur amplitude $a_{\mathbf{k}}$ défini par le développement en modes continus :

$$\varphi(x^\nu) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})} \{ a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \}.$$

2. Calculer les commutateurs $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger]$ et $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}]$, dans l'hypothèse de commutateurs canoniques aux temps égaux.

29 Soient les quantités $P_\mu \stackrel{\text{df}}{=} \int d^3\mathbf{x} \Theta^0_\mu$, avec

$$\Theta^\nu_\mu \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \partial_\mu \varphi - \mathcal{L} \delta^\nu_\mu,$$

associées à l'invariance par translation de la théorie $\mathcal{L}(\varphi, \partial_0 \varphi, \partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi, \partial_3 \varphi)$.

1. Les P_μ dépendent-elles explicitement du temps ? (Comparer avec les constantes M^{0i} , exercice **23**, associées à l'invariance par transformations spéciales de Lorentz.)

2. Calculer $\partial_\nu \Theta^\nu_\mu$, puis dP_μ/dt . En déduire que, dans la version quantique de cette théorie, les P_μ commutent avec l'hamiltonien du système.

3. Sophie s'inquiète de l'apparente inutilité d'invoquer l'invariance par translations pour vérifier ainsi que $dP_\mu/dt = 0$, alors même que c'est cette hypothèse qui, alliée au théorème de Noether, a permis de trouver l'expression de P_μ proposée. Pour étudier ce paradoxe qui, par solidarité, risque une extension littéralement philosophique, envisageons une théorie $\mathcal{L}(\varphi, \partial_0 \varphi, \partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi, \partial_3 \varphi, V)$ en présence d'un champ extérieur $V(x^0, x^1, x^2, x^3)$.

(i) Ce système est-il invariant par translation ? Sophie, et ses amis, n'avaient-ils pas implicitement cette sorte d'invariance au cours de la démonstration de la question 2 ?

(ii) Les équations d'Euler-Lagrange sont-elles modifiées ?

(iii) Calculer $\partial_\nu \Theta^\nu_\mu$ dans ce cas. En déduire la valeur de dP_μ/dt .

30 Soit la théorie $\mathcal{L} = a \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + b \varphi^2$ de l'exercice **24**, question 4.

1. Calculer le moment conjugué $\pi(x^\nu)$ et la densité hamiltonienne $\mathcal{H}(x^\nu)$ correspondants.
2. Quelles conditions doivent satisfaire les paramètres a et b pour que \mathcal{H} soit positive ?

31 Etant donné le champ scalaire φ de densité lagrangienne $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \dots$

1. Exprimer les équations du mouvement du champ φ .
2. Donner l'expression du courant de Noether Θ^μ_ν associé aux translations, puis l'expression de la densité d'énergie correspondante.
3. Que peut-on dire de la solution fondamentale (d'énergie minimale) des équations du mouvement ? Que vaut sa densité d'énergie ?

32 Soit la théorie $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + a\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$.

1. En choisissant pour grandeur de base une longueur L , quelles sont les dimensions d'une longueur, d'un temps, de la densité lagrangienne \mathcal{L} , du champ φ , des paramètres a , m et λ , d'une impulsion, d'une énergie, du moment conjugué π , de la densité hamiltonienne \mathcal{H} ?

2. Mêmes questions en choisissant pour grandeur de base une masse M .

33 Soustraction de l'énergie du vide.

1. Calculer l'expression de l'opérateur $H \stackrel{\text{df}}{=} \int_V d^3\mathbf{x} : \mathcal{H}(x^0, x^1, x^2, x^3) :$ — associé au champ scalaire hermitique de la théorie $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2)$, avec la densité hamiltonienne correspondante prise à un instant quelconque et dans laquelle les produits sont dans l'ordre "normal" — pour vérifier que l'on obtient bien : $H = \sum_{\mathbf{k}} \omega N_{\mathbf{k}}$. (Ainsi, H est bien indépendant du temps x^0 , et on a pris l'énergie du vide pour origine.)

2. Vérifier, à l'aide de cette expression, que H satisfait bien les relations nécessaires pour un générateur de l'évolution

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), H] = i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \mathbf{x}),$$

$$[\pi(t, \mathbf{x}), H] = i \frac{\partial}{\partial t} \pi(t, \mathbf{x}).$$

3. Quelle expression de H obtiendrait-on pour la théorie $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2)$? Existerait-il encore un état fondamental dans cette théorie ?

34 Impulsion du champ scalaire.

1. Montrer que l'insertion du développement en modes de l'opérateur de champ dans la constante $\mathbf{P} = -\int d^3\mathbf{x} \pi \nabla \varphi$, conduit à l'expression $\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} N_{\mathbf{k}}$.

2. Vérifier, à l'aide de cette dernière, que \mathbf{P} satisfait bien les relations nécessaires pour un générateur des translations :

$$[\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3), P_i] = i \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3),$$

$$[\pi(x^0, x^1, x^2, x^3), P_i] = i \frac{\partial}{\partial x^i} \pi(x^0, x^1, x^2, x^3).$$

35 Le but de ce problème est de montrer, sur un exemple, que le courant qui conserve une charge donnée n'est pas unique, et qu'il existe des transformations qui ne sont pas des symétries du lagrangien, mais auxquelles peuvent néanmoins correspondre des courant et charge conservés (*cf.* RAMOND, sec. I.6). Vous avez vu, en cours, qu'à une symétrie de la densité lagrangienne correspond une loi de conservation :

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi + \mathcal{L} dx^\mu \right\} = 0.$$

On n'envisage maintenant que des transformations (des coordonnées ou internes) qui soient paramétrées de façon continue par les ω^i , ($i = 1, \dots, N$).

1. Montrez que la symétrie (ou invariance) du lagrangien se traduit par la conservation $\partial_\mu \mathcal{J}_{(i)}^\mu = 0$ de N quadri-courants de Noether que vous définirez.

2. Retrouvez l'expression des courants de Noether conservés $\Theta^\mu{}_\nu$ associés à l'invariance par translation spatio-temporelle de la densité lagrangienne, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi)$, du champ scalaire φ .

3. Soit la *dilatation* infinitésimale

$$\begin{cases} dx^\mu \stackrel{\text{df}}{=} d\omega x^\mu, \\ \delta_\ell \varphi \stackrel{\text{df}}{=} -d\omega \varphi. \end{cases}$$

(i) Est-ce une symétrie du lagrangien ?

(ii) Calculez le courant de Noether associé à cette transformation, et exprimez ce courant (noté \mathcal{J}_D^μ) en fonction des $\Theta^\mu{}_\nu$.

4. Application aux cas :

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \frac{\lambda}{4!} \varphi^4, \\ V(\varphi) &= \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4. \end{aligned}$$

(i) Calculez $\partial_\mu \mathcal{J}_D^\mu$.

(ii) Quelles sont les dimensions des paramètres λ et m ?

5. On définit quatre nouveaux courants $T^\mu{}_\nu$ en fonction des courants d'impulsion :

$$T^\mu{}_\nu \stackrel{\text{df}}{=} \Theta^\mu{}_\nu + a(\partial^\mu \partial_\nu - \delta_\nu^\mu \partial_\rho \partial^\rho) \varphi^2.$$

(i) Quelle est la dimension du paramètre a ?

(ii) Calculez $\partial_\mu T^\mu{}_\nu$.

(iii) Montrez que les charges conservées associées à $T^\mu{}_\nu$ sont les mêmes que celles qui correspondent à $\Theta^\mu{}_\nu$.

6. On définit un courant $\mathcal{J}'_D{}^\mu \stackrel{\text{df}}{=} x_\rho T^{\mu\rho}$.

(i) Calculez $\partial_\mu \mathcal{J}'_D{}^\mu$.

(ii) A quelle condition ce courant est-il conservé ?

(iii) Calculez la valeur à donner au paramètre a correspondant, dans le cas $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$.

7. Montrez que l'on a, dans ce cas,

$$\mathcal{J}'_D{}^\mu = \mathcal{J}_D{}^\mu + \frac{1}{6} \partial_\rho (x^\mu \partial^\rho - x^\rho \partial^\mu) \varphi^2.$$

Que peut-on dire des charges associées respectivement à $\mathcal{J}'_D{}^\mu$ et à $\mathcal{J}_D{}^\mu$?

36 Déterminez les relations de dispersion entre les paramètres ω et \mathbf{k} intervenant dans les développements en modes plans des champs scalaires solutions des théories suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2, \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{m^2}{2} \varphi^2, \\ \mathcal{L}_3 &= a \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2. \end{aligned}$$

Quelle interprétation pouvez-vous leur donner ?

37 Soient N champs scalaires réels φ_i , ($i = 1, \dots, N$), de lagrangien $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i$.

1. Montrez que cette densité est invariante par rapport aux transformations internes infinitésimales

$$\delta \varphi_i \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij} \varphi_j, \quad \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}.$$

Montrez que ces transformations sont les transformations infinitésimales du groupe $\text{SO}(N)$ des matrices Spéciales (déterminant=+1) Orthogonales (donc réelles) de rang N .

2. Donnez l'expression des courants de Noether conservés $\mathcal{J}_{ij}{}^\mu$ correspondant aux paramètres ε_{ij} . Combien y en a-t-il d'indépendants ?

3. Dans une théorie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i - V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N),$$

quelle doit-être la forme de la fonction V pour que \mathcal{L} ait encore la symétrie interne $\text{SO}(N)$?

38 Soit le champ scalaire $\varphi(\underline{x})$, non-hermitique.

1. Calculez $(\partial_\mu \varphi)^+$ en fonction de $\partial_\mu \varphi$.
2. Calculez $(\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi)^+$.

39 Soient deux champs libres, scalaires, hermitiques, de masses m_1 et m_2 , de lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 - m_1^2 \varphi_1^2) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 - m_2^2 \varphi_2^2).$$

1. Exprimer la densité \mathcal{L} en fonction du champ $\varphi \stackrel{\text{df}}{=} (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$ et de son conjugué φ^+ .
2. A quelle condition la théorie \mathcal{L} est-elle invariante par rapport aux transformations continues de paramètre α (dites du groupe $U(1)$, pour matrices Unitaires de rang 1, si on veut faire bien) : $\varphi(x^\nu) \rightarrow \varphi'(x^\nu) \stackrel{\text{df}}{=} e^{iq\alpha} \varphi(x^\nu)$?

40 Essayez d'évaluer les commutateurs $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^+]$ et $[a_{\mathbf{k}}^+, a_{\mathbf{k}'}^+]$ des opérateurs amplitudes du champ hermitique, dans l'hypothèse d'anticommutateurs canoniques aux temps égaux

$$\begin{aligned} [\varphi(\underline{x}), \pi(\underline{y})]_+^\pm &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\varphi(\underline{x}), \varphi(\underline{y})]_+^\pm &= [\pi(\underline{x}), \pi(\underline{y})]_+^\pm = 0. \end{aligned}$$

(Vous pouvez utiliser l'identité $[A, B] = [A, B]_+ - 2BA$, mais le problème reste quand même sans issue satisfaisante : On ne trouve pas d'interprétation particulière pour ces opérateurs $a_{\mathbf{k}}$.)

41 Evaluer les anticommutateurs $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^+]_+$ et $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}]$ des opérateurs amplitudes, dans l'hypothèse d'anticommutateurs canoniques aux temps égaux. Les $a_{\mathbf{k}}$ admettent-ils, dans ces conditions, une interprétation du genre "opérateurs de création ou de destruction de particules" ?

42 Deux champs scalaires en interaction.

1. Déterminer les équations du mouvement des champs φ_1 et φ_2 de densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 - m_1^2 \varphi_1^2) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 - m_2^2 \varphi_2^2) - V(\varphi_1, \varphi_2).$$

2. Calculer les moments conjugués π_{φ_1} , π_{φ_2} et la densité hamiltonienne.

43 Une théorie de champs en interaction peut en cacher une autre... Soit la densité

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 - m^2 \varphi_1^2) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 - m^2 \varphi_2^2) + \lambda \varphi_1 \varphi_2.$$

1. Exprimer cette densité en fonction des champs $\varphi_\pm \stackrel{\text{df}}{=} (\varphi_1 \pm \varphi_2)/\sqrt{2}$.
2. Quelle interprétation pouvez-vous en donner ?
3. Que se passe-t-il pour $\lambda = m^2$, et pour $\lambda > m^2$?

44 Soit le champ scalaire, hermitique, de densité lagrangienne $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$.

1. Exprimer les équations du mouvement du champ φ .
2. Exprimer le courant de Noether Θ^μ_ν , associé aux translations, puis la densité d'énergie correspondante.
3. Que peut-on dire de la solution fondamentale (ou d'énergie minimale) des équations du mouvement ?
Quelle est sa densité d'énergie ?

45 Assurez vous que vous êtes capable de refaire le calcul complet des équations du mouvement et des moments conjugués du champ de Proca, à partir de la densité lagrangienne $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu$.

46 Soit une théorie de champ de Proca en interaction : $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu$. (Le champ externe quadri-vectoriel $j_\mu(\underline{x})$ est appelé *courant source*.)

1. Quelles sont les dimensions de $F_{\mu\nu}$, \underline{A} et \underline{j} ?
2. Déterminer les équations du mouvement.
3. Calculer $\partial_\alpha j^\alpha$. A quelle condition cette théorie implique-t-elle la conservation du courant source ?
4. Soient les champs

$$\mathbf{E} \stackrel{\text{df}}{=} -\nabla A^0 - \partial \mathbf{A} / \partial t,$$

$$\mathbf{B} \stackrel{\text{df}}{=} \nabla \wedge \mathbf{A}.$$

Calculer $\nabla \wedge \mathbf{E}$, $\nabla \cdot \mathbf{B}$, $\nabla \cdot \mathbf{E}$ et $\nabla \wedge \mathbf{B}$.

5. Ecrire les équations du mouvement dans le cas d'un courant source conservé.
6. Dans le cas d'une source ponctuelle immobile

$$\begin{cases} j^0 = q\delta^3(\mathbf{r}) \\ \mathbf{j} = 0 \end{cases}.$$

(i) Ecrire les équations du mouvement pour des solutions $A^0(\mathbf{r})$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ statiques.

(ii) En déterminer les solutions qui tendent vers zéro à l'infini. (Vous pouvez, par exemple, utiliser la transformation du plus illustre des préfets de l'Isère.)

(iii) Exprimer ces solutions dans le système d'unités légal, dans le cadre de la réglementation en vigueur pour l'électrodynamique.

7. Thèmes de réflexion : On peut faire de l'électrodynamique (classique) sans photon. On ne peut parler de photon de masse nulle sans faire de théorie quantique (souvenez-vous qu'Einstein avait besoin de \hbar pour expliquer les fluctuations du rayonnement ou l'effet photo-électrique).

(i) Peut-on parler de photon massif sans théorie quantique ?

(ii) Quelle nouvelle constante "fondamentale" apparaît dans la théorie classique correspondant à la théorie quantique avec photon massif ?

47 A propos du champ quadri-vectoriel.

1. Enumérez les scalaires que l'on peut construire avec le champ vectoriel A_μ , ses dérivées $\partial_\mu A_\nu$, et les tenseurs invariants invariants en géométrie de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$ et $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$.

2. On peut écrire les mêmes choses autrement, en utilisant la décomposition

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu) \\ &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}S_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

(i) Calculez le dual de $S_{\mu\nu}$: $*S^{\mu\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}S_{\rho\lambda}$.

(ii) Soit $*F^{\mu\nu}$, le dual de $F_{\mu\nu}$. Quels scalaires pouvez-vous construire avec $F_{\mu\nu}$, $*F_{\mu\nu}$ et $S_{\mu\nu}$?

(iii) Montrez que $F_{\mu\nu}*F^{\mu\nu}$ est une divergence.

3. Soit la densité lagrangienne — bilinéaire par rapport au champ et à ses dérivées — la plus générale :

$$\mathcal{L} = aF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + bS_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + cA_\mu A^\mu.$$

Quelles sont les équations du mouvement des composantes du champ ?

4. Montrez que la divergence du champ satisfait une équation de Klein-Gordon.
5. Dans le cas $b = 0$, que se passe-t-il ?

6. Dans le cas $b \neq 0$, on va chercher, comme d'habitude, des solutions de base du type $\underline{\varepsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, pour \mathbf{k} donné.

(i) Quelle condition doivent satisfaire $\underline{\varepsilon}$ et \underline{k} ?

(ii) Calculez la divergence d'une de ces solutions.

(iii) Quelle condition doit satisfaire \underline{k}^2 pour une solution dont la polarisation $\underline{\varepsilon}$ est selon \underline{k} ?

(iv) Pour une solution dont la polarisation $\underline{\varepsilon}$ n'est pas proportionnelle à \underline{k} , quelles conditions obtenez-vous pour \underline{k}^2 et pour $\underline{\varepsilon} \cdot \underline{k}$?

(v) Étudiez les cas $a = b$ et $a = 0$.

48 Le point sur les rotations et leur représentation de rang 2.

1. Tout le monde (?) sait qu'à une rotation (paramétrée pour ce faire par trois angles d'Euler, ou par un axe et un angle) on peut associer une matrice réelle orthogonale de rang 3 et déterminant 1 (pas de réflexion). La réciproque est moins évidente. Soit une matrice R réelle, de rang 3, déterminant 1, orthogonale, c'est-à-dire conservant la norme (au sens de $|\mathbf{u}|^2 \stackrel{\text{df}}{=} u_i u_i$) : $|R\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u}|^2$, quel que soit \mathbf{u} .

(i) Calculer $|R\mathbf{u}|^2$, et montrer que l'on a $\widetilde{R}R = I$. En déduire la relation $R\widetilde{R} = I$, et les propriétés des vecteurs colonnes de R .

(ii) Déterminer l'inverse de R .

(iii) Montrer que les matrices R sont les éléments d'un groupe, baptisé $\text{SO}(3)$ pour Spéciales (déterminant 1), Orthogonales, de rang 3.

(iv) Soit une matrice $R \in \text{SO}(3)$, et \mathbf{u} un vecteur propre correspondant à l'éventuelle valeur propre λ . Calculer $|R\mathbf{u}|^2$, et en déduire que toute valeur propre de R satisfait la condition nécessaire $\lambda^2 = 1$.

(v) Étant donné une matrice A quelconque (réelle), comparer $(\widetilde{A}A)$ et $\widetilde{A}A$. En déduire que $\widetilde{A}A$ est symétrique quelle que soit A . En déduire que R dépend finalement de 3 paramètres indépendants.

(vi) Montrer que $R - I = (\widetilde{I - R})R$. En déduire que $\text{Det}(R - I) = \text{Det}(I - R)$, et qu'en nombre impair de dimensions (3 ici) il existe (au moins) une valeur propre unité. Soit $\hat{\omega}$ la direction propre correspondante. Quelle est sa signification géométrique? Combien de paramètres indépendants sont attachés à la spécification de $\hat{\omega}$?

(vii) Pour étudier plus complètement une matrice $R \in \text{SO}(3)$, on choisit comme repère orthonormé l'ensemble des vecteurs $\hat{\mathbf{3}} \stackrel{\text{df}}{=} \hat{\omega}, \hat{\mathbf{1}}$ et $\hat{\mathbf{2}}$. Quelle est, dans ce repère, la forme générale de cette matrice R en fonction des cosinus et sinus d'un paramètre ω ? Quelle est la signification géométrique de $R\hat{\mathbf{1}}$ et de $R\hat{\mathbf{2}}$? Calculer la trace $\text{Tr}R$.

(viii) Récapitulation. Quelle rotation $\mathcal{R}(\omega)$ peut-on associer à une matrice $R \in \text{SO}(3)$? A propos : une matrice $r \in \text{SO}(2)$ admet-elle une valeur propre unité? Quelle est la signification géométrique de la réponse?

2. Soit une matrice $R(\omega)$ donnée, correspondant à une rotation ω dans l'espace à 3 dimensions. Calculer, dans le repère orthonormé $(\hat{\mathbf{3}} \stackrel{\text{df}}{=} \hat{\omega}, \hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}})$, les composantes du vecteur $\mathbf{x}' = R(\omega)\mathbf{x}$ en fonction des composantes de \mathbf{x} . Montrer que le résultat peut s'écrire sous forme vectorielle et que l'on a, indépendamment de tout repère,

$$R(\omega)\mathbf{x} = \cos\omega\mathbf{x} + (1 - \cos\omega)(\hat{\omega} \cdot \mathbf{x})\hat{\omega} + \sin\omega\hat{\omega} \wedge \mathbf{x}.$$

3. A toute direction $\hat{\mathbf{v}}$ — spécifiée par ses cosinus directeurs dans un repère donné — et à tout réel φ , on associe la matrice complexe 2×2

$$U \stackrel{\text{df}}{=} e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{v}}\varphi},$$

où σ_1, σ_2 et σ_3 sont les trois matrices conventionnelles dites de Pauli.

(i) Montrer que l'on a $U = \cos\varphi I + i \sin\varphi \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{v}}$.

(ii) Calculer les coefficients de la matrice U et son déterminant.

(iii) Étant donné une matrice A quelconque, calculer $e^A e^{-A}$. En déduire que U est unitaire et, finalement, que $U \in \text{SU}(2)$, le groupe des matrices Spéciales, Unitaires, de rang 2.

4. La réciproque de cette propriété — à savoir qu'à toute matrice de $SU(2)$ on peut associer une direction $\hat{\mathbf{d}}$ et un réel α qui permettent d'écrire ladite matrice sous la forme $e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{d}}\alpha}$ — est *a priori* un peu moins évidente...

(i) Vérifiez que toute matrice M complexe, 2×2 , peut se décomposer en

$$M = (a + ib)I + (\mathbf{c} + i\mathbf{d}) \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

avec a , b , \mathbf{c} et \mathbf{d} réels. (Pour cela il suffit de trouver des expressions explicites, uniques, des a , b , c_i et d_i en fonctions des coefficients de M .)

(ii) Avec la matrice M ainsi décomposée, calculer MM^+ et M^+M et en déduire trois conditions indépendantes que doivent satisfaire les paramètres a , b , \mathbf{c} et \mathbf{d} lorsque la matrice M est unitaire.

(iii) Calculer, de la même façon, le déterminant de M et en déduire deux conditions que doivent satisfaire les mêmes paramètres lorsque la matrice M est spéciale.

(iv) En déduire que toute matrice $M \in SU(2)$ peut se mettre sous la forme

$$M = \cos \alpha I + i \sin \alpha \hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{d}}\alpha}.$$

5. On sait maintenant...

— qu'à toute rotation $\mathcal{R}(\boldsymbol{\omega})$, de matrice $R(\boldsymbol{\omega}) \in SO(3)$, on peut associer une (façon de parler) matrice $U = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}}\varphi(\boldsymbol{\omega})} \in SU(2)$,

— que toute matrice $M \in SU(2)$ peut se mettre sous la forme $e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{d}}\alpha}$, et qu'on peut donc lui associer une (toujours façon de parler) matrice $R(\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{df}}{=} \hat{\mathbf{d}}f(\alpha)) \in SO(3)$, et une rotation $\mathcal{R}(\boldsymbol{\omega})$.

Reste à montrer que ces éléments de $SU(2)$ constituent une représentation (linéaire, forcément linéaire) de $SO(3)$, c'est-à-dire qu'à toute $R(\boldsymbol{\omega}) = R(\boldsymbol{\omega}_2)R(\boldsymbol{\omega}_1)$ correspond $U = U_2U_1$.

(i) Etant donné une $R(\boldsymbol{\omega})$ et un vecteur \mathbf{x} quelconques, calculer la matrice $U(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x})U^+$ correspondante. (Un conseil : utiliser U sous la forme $\cos \varphi + i \sin \varphi \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}$.)

(ii) Montrer (en se remémorant le résultat de la question 2.) que l'on peut choisir $\varphi(\boldsymbol{\omega})$ en sorte que l'on ait $U(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x})U^+ = \boldsymbol{\sigma} \cdot R(\boldsymbol{\omega})\mathbf{x}$. Donner l'expression de la matrice, dorénavant notée $U(\boldsymbol{\omega})$, correspondant à ce choix.

(iii) Tant qu'on y est, on peut se demander si la donnée de la matrice $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}$ permet de retrouver \mathbf{x} . Calculer $\text{Tr}(\sigma_i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}))$, et en déduire une expression de la composante x_i .

(iv) Montrer que $U(\boldsymbol{\omega}_2)U(\boldsymbol{\omega}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x})(U(\boldsymbol{\omega}_2)U(\boldsymbol{\omega}_1))^+ = \boldsymbol{\sigma} \cdot R(\boldsymbol{\omega}_2)R(\boldsymbol{\omega}_1)\mathbf{x}$.

(v) Soit deux rotations successives $R(\boldsymbol{\omega}_1)$ et $R(\boldsymbol{\omega}_2)$, et $\boldsymbol{\omega}$ le paramètre de la rotation résultante $R(\boldsymbol{\omega}) = R(\boldsymbol{\omega}_2)R(\boldsymbol{\omega}_1)$. Montrer que l'on a $U(\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x})U^+(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot R(\boldsymbol{\omega}_2)R(\boldsymbol{\omega}_1)\mathbf{x}$

(vi) Reste à montrer que $U(\boldsymbol{\omega}) = U(\boldsymbol{\omega}_2)U(\boldsymbol{\omega}_1)$. C'est peut-être évident (?), mais il faut quand même le faire ! Montrer que le résultat précédent implique $\boldsymbol{\sigma} \cdot R^{-1}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{x} = U^+(\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x})U(\boldsymbol{\omega})$, et que l'on peut en déduire (à l'aide du résultat iv)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} = U(\boldsymbol{\omega}_2)U(\boldsymbol{\omega}_1)U^+(\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x})U(\boldsymbol{\omega})U(\boldsymbol{\omega}_1)^+U(\boldsymbol{\omega}_2)^+,$$

ou encore

$$[U(\boldsymbol{\omega}_2)U(\boldsymbol{\omega}_1)U^+(\boldsymbol{\omega}), \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}] = 0 \quad \forall \mathbf{x}.$$

(vii) Quelle est la forme d'une matrice complexe 2×2 (qui, nul(le) ne l'a oublié, peut toujours se décomposer sous la forme indiquée à la question 4.i) qui commute avec $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}$ quel que soit \mathbf{x} ?

(viii) Les trois matrices $U(\boldsymbol{\omega}_1)$, $U(\boldsymbol{\omega}_2)$ et $U(\boldsymbol{\omega})$ étant, ne l'oublions pas, unitaires et spéciales, montrer que $U(\boldsymbol{\omega})$ est nécessairement égale à $U(\boldsymbol{\omega}_2)U(\boldsymbol{\omega}_1)$.

6. En manière d'épilogue. Vous devriez maintenant être à peu près convaincu(e) que les matrices $e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega}} \in SU(2)$ constituent une représentation linéaire des matrices $R(\boldsymbol{\omega}) \in SO(3)$. Les doublets complexes qui, au cours des rotations, se transforment selon ces matrices 2×2 sont appelés *spinours*.

49 Générateurs des transformations de Lorentz.

1. Vérifiez que les 6 matrices 4×4 , \mathcal{J} et \mathcal{K} , génératrices des transformations de Lorentz infinitésimales $\Lambda = I - \mathcal{J} \cdot d\omega - \mathcal{K} \cdot d\varphi$, ont pour éléments

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_p^\mu{}_\nu &= \delta_{\mu 0} \delta_{\nu p} + \delta_{\mu p} \delta_{\nu 0}, \\ \mathcal{J}_p^\mu{}_\nu &= - \sum_{qr} \varepsilon_{pqr} \delta_{q\mu} \delta_{r\nu}.\end{aligned}$$

2. En déduire les commutateurs

$$\begin{aligned}[\mathcal{J}_p, \mathcal{J}_q] &= \varepsilon_{pqr} \mathcal{J}_r, \\ [\mathcal{J}_p, \mathcal{K}_q] &= \varepsilon_{pqr} \mathcal{K}_r, \\ [\mathcal{K}_p, \mathcal{K}_q] &= -\varepsilon_{pqr} \mathcal{J}_r.\end{aligned}$$

50 Montrez qu'au cours d'une rotation pure $d\omega$, on a : $\eta'^+ \sigma_i \chi' = \eta^+ \sigma_i \chi - \varepsilon_{ijk} d\omega_j \eta^+ \sigma_k \chi$.

51 Calculez les transformées de $\eta_+^+ \sigma_1 \chi_+$, $\eta_+^+ \sigma_2 \chi_+$, et $\eta_+^+ \sigma_3 \chi_+$, au cours d'une transformation spéciale de Lorentz $d\hat{\varphi}$.

52 La représentation de Weyl : Etant données les cinq matrices de rang 4,

$$\gamma^0 \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où 0 , I et σ_i sont les matrices (de rang 2) nulle, unité et de Pauli, vérifiez qu'elles ont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ &= 2\eta^{\mu\nu} I, \\ [\gamma^5, \gamma^\mu]_+ &= 0, \\ (\gamma^5)^2 &= I, \\ \gamma^5 &= i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3.\end{aligned}$$

53 Montrez que les composantes contravariantes

$$\begin{cases} A^0 \stackrel{\text{df}}{=} \eta_+^+ \chi_+ - \eta_-^+ \chi_- \\ \mathbf{A} \stackrel{\text{df}}{=} -\eta_+^+ \boldsymbol{\sigma} \chi_+ - \eta_-^+ \boldsymbol{\sigma} \chi_- \end{cases}$$

du quadri-vecteur axial \underline{A} associé aux spineurs de Weyl χ_\pm et η_\pm , peuvent s'écrire, en termes de bispineurs :

$$\begin{cases} A^0 = \bar{H} \gamma^5 \gamma^0 X \\ \mathbf{A} = \bar{H} \boldsymbol{\gamma} X \end{cases}.$$

54 Vérifiez que le changement de représentation $H' \stackrel{\text{df}}{=} UH$ — où H est un bispineur et U une matrice unitaire 4×4 — implique

$$\overline{(H')} = \bar{H}' \stackrel{\text{df}}{=} \bar{H} U^+.$$

55 La représentation de Dirac : Considérant les définitions des bispineurs et matrices gammas dans la représentation de Weyl, et la matrice de transformation

$$U \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \dots$$

1. Vérifiez que U est unitaire.
2. Déterminez les expressions, dans la nouvelle représentation, des composantes d'un bispineur, $X_{(D)}$ en fonction des spineurs de Weyl χ_+ et χ_- .
3. Déterminez les expressions des nouvelles matrices gammas, $\gamma_{(D)}^\mu$ et $\gamma_{(D)}^5$.

56 Soit la matrice $U \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_{(D)}^0 \gamma_{(D)}^2 + \gamma_{(D)}^0)$.

1. Ecrivez U en fonction des matrices I et σ_2 de rang 2. Vérifiez que U est unitaire.
2. Montrez que cette transformation, appliquée aux matrices $\gamma_{(D)}^\mu$ et $\gamma_{(D)}^5$ en représentation de Dirac, aboutit aux matrices gammas de la *représentation de Majorana*,

$$\begin{aligned} \gamma_{(M)}^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_{(M)}^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}, & \gamma_{(M)}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_{(M)}^3 &= \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}, \\ \gamma_{(M)}^5 &= \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui sont toutes (leurs éléments) imaginaires pures.

57 L'hermiticité des matrices gammas :

1. Calculer les conjuguées hermitiques des matrices gammas, en représentations de Weyl et de Dirac. Montrer que ces matrices sont soit hermitiques, soit anti-hermitiques.
2. Montrer que le caractère d'(anti-)hermiticité de chacune des matrices gammas est, en fait, indépendant de la représentation.

58 Transformations de Lorentz et bispineurs :

1. Quel est le résultat d'une transformation spéciale de Lorentz $d\varphi_1 \hat{1}$ sur un bispineur de Weyl ?
2. Montrez que ce résultat peut encore se mettre sous la forme $X' = \{I + \frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]\} X$.

59 Parmi les six matrices indépendantes de rang 4, $\sigma^{\mu\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, on considère :

$$\sigma_1 \stackrel{\text{df}}{=} \sigma^{23}, \quad \sigma_2 \stackrel{\text{df}}{=} \sigma^{31}, \quad \sigma_3 \stackrel{\text{df}}{=} \sigma^{12}.$$

Vérifiez que l'on a, dans les représentations de Weyl et de Dirac,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

en fonction des matrices σ_i de rang 2 et de Pauli.

60 Transformation des champs de spineurs.

1. Vérifiez que les matrices S_\pm de transformation infinitésimale des spineurs de Weyl au cours des transformations de Lorentz satisfont les relations $S_+^+ S_- = S_-^+ S_+ = I$.
2. Vérifiez qu'au cours des mêmes transformations, les combinaisons, formées avec des champs de spineurs, $\eta_\pm^\pm(x^0, x^1, x^2, x^3) \partial_\mu \chi_\mp(x^0, x^1, x^2, x^3)$, se transforment comme des composantes covariantes de quadri-vecteur.

61 Calculez explicitement l'effet d'une rotation pure $d\omega_3 \hat{\mathbf{3}}$ sur la combinaison de champs de spineurs de Weyl $\eta_{\pm}^+(x^0, x^1, x^2, x^3) \sigma^{\mu} \partial_{\mu} \chi_{\mp}(x^0, x^1, x^2, x^3)$.

62 Réflexions et champs de spineurs.

1. Montrez qu'au cours de l'opération de réflexion, les combinaisons $\eta_+^+ \partial_{\mu} \chi_- + \eta_-^+ \partial_{\mu} \chi_+$ et $\eta_+^+ \sigma^{\mu} \partial_{\mu} \chi_+ + \eta_-^+ \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \chi_-$ ont respectivement des comportements de quadri-vecteur polaire et de vrai scalaire. (Attention au comportement des ∂_{μ} .)

2. Montrez que ce quadri-vecteur et ce scalaire peuvent s'écrire, en termes de bispineurs, $\bar{H} \partial_{\mu} X$ et $\bar{H} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} X$.

63 Montrez que les combinaisons $\eta_+^+ \partial_{\mu} \chi_- - \eta_-^+ \partial_{\mu} \chi_+$ et $\eta_+^+ \sigma^{\mu} \partial_{\mu} \chi_+ - \eta_-^+ \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \chi_-$ sont, respectivement, un vecteur axial et un pseudo-scalaire, et qu'elles peuvent s'écrire $\bar{H} \gamma^5 \partial_{\mu} X$ et $\bar{H} \gamma^5 \gamma^{\mu} \partial_{\mu} X$.

64 Au quadri-vecteur \underline{x} , de composantes x^{μ} , on associe la matrice complexe de rang 2,

$$X \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

soit encore $X = \sigma_{\mu} x^{\mu}$, en notant : $\{\sigma_{\mu}\} \stackrel{\text{df}}{=} (I, \boldsymbol{\sigma})$. On définit également, pour les besoins de la cause, $\{\bar{\sigma}_{\mu}\} \stackrel{\text{df}}{=} (I, -\boldsymbol{\sigma})$.

1. Montrez que

- (i) $\text{Trace}(\bar{\sigma}_{\mu} \sigma_{\nu}) = 2\eta_{\mu\nu}$,
- (ii) $x^{\mu} = \frac{1}{2} \text{Trace}(\bar{\sigma}^{\mu} X)$,
- (iii) $\text{Det}(X) = \underline{x}^2$.

2. Soit les transformations $X \rightarrow X' \stackrel{\text{df}}{=} AXA^+$, les matrices A n'ayant d'autre particularité que d'être Complexes, de rang 2, et Spéciales (c'est-à-dire de déterminant égal à +1). On dit pour cela que ce sont des éléments du groupe Linéaire $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

(i) La matrice X' a-t-elle la forme d'une matrice X ?

(ii) Calculez la valeur de \underline{x}'^2 associée.

(iii) A toute matrice A du groupe $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ on associe une matrice $\Lambda^{\mu}_{\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} \text{Trace}(\bar{\sigma}_{\mu} A \sigma_{\nu} A^+)$. Montrez que Λ est une matrice de transformation de Lorentz (c'est-à-dire un élément du groupe $\text{SO}(3, 1)$).

(iv) Qu'en est-il de l'application inverse $\Lambda \rightarrow A$?

3. Soit les matrices Λ_1 et Λ_2 associées à A_1 et A_2 . Montrez qu'à $A_1 A_2$ est associée la matrice $\Lambda_1 \Lambda_2$.

4. Montrez que la forme générale d'une matrice de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ infiniment voisine de l'identité peut s'écrire $A = I + \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$.

5. Calculez la combinaison $\sigma_{\mu} x'^{\mu}$ correspondant à une transformation infinitésimale représentée par la matrice $A = I - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$.

En déduire les coordonnées x'^{μ} en fonction des x^{ν} , ainsi qu'une interprétation de la transformation A .

6. Mêmes questions pour $A = I + \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\omega}$.

65 Hermiticité du lagrangien de Dirac.

1. Montrez que, pour des champs de bispineurs, on a (quelle que soit la représentation)

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \psi)^+ &= \bar{\psi} \psi, \\ (\bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi)^+ &= \bar{\psi} \gamma^{\mu} \overleftarrow{\partial}_{\mu} \psi \stackrel{\text{df}}{=} (\partial_{\mu} \bar{\psi}) \gamma^{\mu} \psi, \end{aligned}$$

(le symbole $\overleftarrow{\partial}_{\mu}$ signifie la dérivation par rapport à x^{μ} de ce qui le flanque à gauche).

2. En utilisant le fait que la densité lagrangienne $\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi - m \bar{\psi} \psi$ peut aussi bien s'écrire

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \frac{i}{2} \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} - \overleftarrow{\partial}_{\mu}) \psi + \frac{i}{2} \partial_{\mu} (\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi) - m \bar{\psi} \psi,$$

en déduire qu'elle est équivalente à une densité lagrangienne hermitique (au sens où les équations du mouvement qui s'en dérivent sont les mêmes).

66 Ecrivez explicitement le système d'équations différentielles auxquelles obéissent les quatre composantes $\psi_\alpha(x^\nu)$ du champ de bispineurs $\psi(x^\nu)$ solution de l'équation de Dirac dans la représentation standard (ou de Dirac).

67 Dans le système d'unités " $\hbar = c = 1$ ", on adopte comme grandeur de référence la longueur spatiale (dimension L). Quelles sont alors les dimensions...

- d'un temps t ?
- d'une vitesse v ?
- d'une impulsion p ?
- d'une énergie E ?
- d'une "charge" électrique $q^2/4\pi\epsilon_0$?
- d'une action S ?
- d'un lagrangien L ?
- d'une densité lagrangienne \mathcal{L} ?
- d'une densité hamiltonienne \mathcal{H} ?
- d'un champ scalaire φ ?
- d'un champ vectoriel \underline{A} ?
- d'un champ spinoriel ψ ?

68 Vérifiez que l'équation de Dirac conduit, explicitement, dans la représentation de Majorana (exercice 56), au système différentiel

$$\begin{array}{rcccc} -\partial_x \psi_1 & +\partial_z \psi_2 & & +(\partial_t - \partial_y) \psi_4 = m\psi_1 \\ \partial_z \psi_1 & +\partial_x \psi_2 & -(\partial_t - \partial_y) \psi_3 & = m\psi_2 \\ & (\partial_t + \partial_y) \psi_2 & -\partial_x \psi_3 & +\partial_z \psi_4 = m\psi_3 \\ -(\partial_t + \partial_y) \psi_1 & & +\partial_z \psi_3 & +\partial_x \psi_4 = m\psi_4 \end{array}$$

dont tous les coefficients sont réels.

69 Soit le champ $\psi(\underline{x})$ solution de $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$. Montrez, en conjuguant les deux membres de cette équation, que l'on a : $\bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0$.

70 Champ de Dirac et équation de Klein-Gordon.

1. Soit le quadri-vecteur \underline{a} . Dans un repère où ses composantes sont a^μ , on lui associe une matrice 4×4 : $\not{a} \stackrel{\text{df}}{=} a_\mu \gamma^\mu$. Calculez $(\not{a})^2$.

2. Soit $\psi(\underline{x})$ un champ bispinoriel solution de l'équation de Dirac libre $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$. En appliquant, de la gauche, l'opérateur matriciel $(i\not{\partial} + m)$ aux deux membres de cette équation, montrez que ψ est aussi solution d'une équation de Klein-Gordon.

71 Identités de Gordon.

1. Démontrer l'identité :

$$\bar{u}_r(\mathbf{p}) \gamma^\mu u_s(\mathbf{q}) = \frac{1}{2m} \bar{u}_r(\mathbf{p}) \{ (\underline{p} + \underline{q})^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (\underline{p} - \underline{q})_\nu \} u_s(\mathbf{q}),$$

où les bispineurs $u_r(\mathbf{p})$ sont solutions de l'équation $(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0$, et les matrices $\sigma^{\mu\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

2. En déduire l'expression de $\bar{v}_r(\mathbf{p}) \gamma^\mu v_s(\mathbf{q})$, pour des bispineurs $v_r(\mathbf{p})$ qui sont solutions de l'équation $(\not{p} + m)v_r(\mathbf{p}) = 0$.

3. Même question pour $\bar{u}_r(\mathbf{p}) \gamma^\mu \gamma^5 u_s(\mathbf{q})$.

4. Montrer que $\bar{u}_r(\mathbf{p}) \not{q} u_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{m} \underline{p} \cdot \underline{q} \bar{u}_r(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p})$.

5. En déduire, pour des bispineurs orthonormés à $\bar{u}u = -\bar{v}v = 2m$, les identités :

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(\mathbf{p}) \not{q} u_s(\mathbf{p}) &= \bar{v}_r(\mathbf{p}) \not{q} v_s(\mathbf{p}) = 2 \underline{p} \cdot \underline{q} \delta_{rs} \\ \bar{v}_r(\mathbf{p}) \not{q} u_s(\mathbf{p}) &= 0 \\ u_r^+(\mathbf{p}) \not{q} u_s(\mathbf{p}) &= 2 \mathbf{p} \delta_{rs}. \end{aligned}$$

- 72 Vérifiez explicitement que les équations du mouvement obtenues à partir de la densité lagrangienne “symétrisée” (hermitique)

$$\mathcal{L}_{\text{sym.}} = \bar{\psi} \frac{i}{2} \gamma^\mu (\partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi,$$

sont bien identiques aux équations obtenues à partir de

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi.$$

- 73 Solutions de l'équation de Dirac libre, en repère quelconque.

1. Etant donné un mode \mathbf{p} et un choix d'axes d'espace quelconque, montrez que l'on obtient, en employant la méthode décrite en cours, les spineurs de base suivants :

$$u_1(\mathbf{p}) = \sqrt{\omega+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p^3}{\omega+m} \\ \frac{p^1+ip^2}{\omega+m} \end{pmatrix}, \quad u_2(\mathbf{p}) = \sqrt{\omega+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p^1-ip^2}{\omega+m} \\ -\frac{p^3}{\omega+m} \end{pmatrix},$$

$$u_3(\mathbf{p}) = \sqrt{\omega+m} \begin{pmatrix} -\frac{p^3}{\omega+m} \\ -\frac{p^1+ip^2}{\omega+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4(\mathbf{p}) = \sqrt{\omega+m} \begin{pmatrix} -\frac{p^1-ip^2}{\omega+m} \\ \frac{p^3}{\omega+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Rappelez les valeurs de p^0 correspondant à chacune de ces solutions.
3. Quel est le résultat de l'application de la matrice hélicité à ces solutions ? Sont-elles vecteurs propres de l'hélicité ?

- 74 A quelle condition les spineurs χ et ϕ conduisent-ils à des bispineurs

$$\begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\omega+m} \chi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\omega+m} \phi \\ \phi \end{pmatrix}$$

qui soient vecteurs propres de la matrice hélicité $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$?

- 75 Conjugaison “à la Dirac”.

1. A l'aide des expressions trouvées en cours pour les $u_r(p\hat{\mathbf{z}})$ et $v_r(p\hat{\mathbf{z}})$, calculez les conjugués : $\bar{u}_1(p\hat{\mathbf{z}})$, $\bar{u}_2(p\hat{\mathbf{z}})$, $\bar{v}_1(p\hat{\mathbf{z}})$ et $\bar{v}_2(p\hat{\mathbf{z}})$.
2. Calculez les produits $\bar{u}_r(p\hat{\mathbf{z}})u_s(p\hat{\mathbf{z}})$, $\bar{v}_r(p\hat{\mathbf{z}})v_s(p\hat{\mathbf{z}})$ et $\bar{v}_r(p\hat{\mathbf{z}})u_s(p\hat{\mathbf{z}})$.

- 76 Les bispineurs $v_1(\mathbf{p}) \stackrel{\text{df}}{=} -u_4(-\mathbf{p})$ et $v_2(\mathbf{p}) \stackrel{\text{df}}{=} u_3(-\mathbf{p})$ sont évidemment encore vecteurs propres de la matrice hélicité $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. Pour quelles valeurs propres ? (Calculez explicitement l'action de la matrice hélicité sur chacun de ces bispineurs.)

77 Spineurs propres d'une composante du spin.

1. Soient les trois matrices de rang 4 : $\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{df}}{=} \gamma^5 \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$. Calculez ces matrices en fonction des matrices de Pauli, dans la représentation standard.

2. Etant donné un vecteur unitaire $\hat{\mathbf{a}}$,
 (i) montrez que $\beta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}}) = -\gamma^5(\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{a}})$,
 (ii) de la même façon, calculez $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}})\beta$,
 (iii) en déduire la valeur du commutateur $[\beta, \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}}]$.

3. Toujours avec le vecteur $\hat{\mathbf{a}}$,
 (i) montrez que

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}}) &= -\gamma^5(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{a}}), \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) &= -\gamma^5(\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{a}})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}),\end{aligned}$$

- (ii) calculez les produits $\gamma^i \gamma^j$ en fonction des matrices de Pauli,
 (iii) exprimez le commutateur $[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}}]$ en fonction de γ^5 , $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{p} et $\hat{\mathbf{a}}$.

4. Pour quelles valeurs de $\hat{\mathbf{a}}$ le bispineur $u(\mathbf{p})$, solution de base de l'équation de Dirac associée à \mathbf{p} , peut-il être aussi spineur propre de $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}}$?

78 Bispineurs de base et projecteurs. Soit les bispineurs $u(\mathbf{p})$ et $v(\mathbf{p})$ respectivement solutions des équations $(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0$ et $(\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0$.

1. Dans le cas $\mathbf{p} = 0 \dots$
 (i) Quelles formes prennent ces équations en représentation standard ?
 (ii) En déduire quatre solutions $u_1(0)$, $u_2(0)$, $v_1(0)$ et $v_2(0)$, orthogonales et simultanément bispineurs propres de $\sigma_3 \stackrel{\text{df}}{=} \frac{i}{2}[\gamma^1, \gamma^2]$, normalisées à $\bar{u}_r(0)u_s(0) = -\bar{v}_r(0)v_s(0) = 2m\delta_{rs}$, $\bar{v}_r(0)u_s(0) = 0$.

2. Dans le cas $\mathbf{p} \neq 0 \dots$
 (i) Calculer $(\not{p} - m)(\not{p} + m)$.
 (ii) En déduire que le bispineur $(\not{p} + m)u_r(0)$ est une solution de l'équation $(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0$.

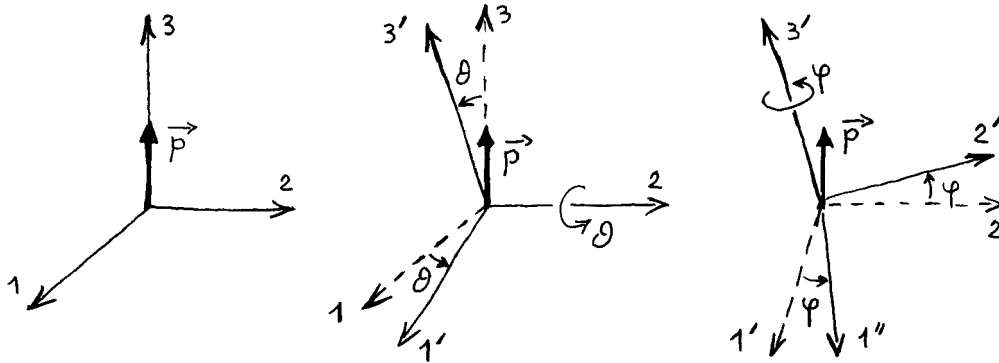
3. On pose donc $u_r(\mathbf{p}) = N(\not{p} + m)u_r(0)$. Reste à vérifier l'orthogonalité de ces solutions et à les normaliser à quelque chose.

- (i) Calculer $\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})$. (Conseils : Développer $(\not{p} + m)^2$; évaluer $\bar{u}_r(0)\not{p}u_s(0)$ à l'aide de l'identité démontrée à l'occasion de l'exercice 71, question 4.)
 (ii) Déterminer la valeur de N en sorte que $\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = 2m\delta_{rs}$.

4. Reste le coup du projecteur pour assurer la fermeture.
 (i) Montrer que $\sum_{r=1}^2 u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p}) = (\not{p} + m)(\gamma^0 + 1)(\not{p} + m)/2(p^0 + m)$.
 (ii) Calculer $(\not{p} + m)^2$, $[\gamma^0, \not{p}]_+$, $\not{p}\gamma^0\not{p}$ et $(\not{p} + m)\gamma^0(\not{p} + m)$.
 (iii) En déduire l'identité $\sum_{r=1}^2 u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p}) = \not{p} + m$.

79 Rotation des bispineurs et hélicité.

1. Soit le repère $\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ ci-dessous. Quelles sont les composantes de \mathbf{p} dans ce repère ?



2. Soit le repère $\{\hat{1}', \hat{2}, \hat{3}'\}$ ci-dessus.

(i) Quelles sont les composantes de \mathbf{p} dans ce repère ?

(ii) Quel est l'opérateur qui représente, pour un spineur, la rotation qui fait passer du repère $\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ au repère $\{\hat{1}', \hat{2}, \hat{3}'\}$?

3. Soit le repère $\{\hat{1}'', \hat{2}', \hat{3}'\}$ ci-dessus.

(i) Quel opérateur représente, pour un spineur, la rotation $\{\hat{1}', \hat{2}, \hat{3}'\} \rightarrow \{\hat{1}'', \hat{2}', \hat{3}'\}$?

(ii) Montrez que, précédée et suivie de rotations adéquates, cette rotation peut être ramenée à une rotation autour de l'axe $\hat{3}$.

4. En déduire que la rotation qui fait passer de $\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ à $\{\hat{1}'', \hat{2}', \hat{3}'\}$ est représentée, pour un spineur, par la matrice

$$R = e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{2}\theta} e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{3}\varphi}.$$

5. Montrez que cette matrice a pour éléments

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$

6. Quelle est, en fonction de R , l'expression de la matrice U qui représente la même rotation pour un bispineur ?

7. Soient les bispineurs $u'_r \stackrel{\text{df}}{=} U u_r(p\hat{3})$ obtenus à partir des bispineurs de base $u_1(p\hat{3})$ et $u_2(p\hat{3})$ définis en cours.

(i) Quelle est leur signification ?

(ii) En particulier, de quelle équation sont-ils solutions ?

(iii) Calculez les composantes de u'_1 et u'_2 .

(iv) Sont-ils encore spineurs propres de l'hélicité ?

(v) Sont-ils spineurs propres de $\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ avec, toujours, $\sigma_3 \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

80 On considère l'ensemble des matrices de rang 4 :

$$I, \quad \gamma^\mu, \quad \gamma^5, \quad \gamma^5\gamma^\mu, \quad \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu],$$

pour $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$, avec $\mu < \nu$.

1. Combien y en a-t-il ?

2. Calculez chacune de ces matrices en fonction des matrices de Pauli, dans la représentation standard.

3. Qu'obtient-on en faisant le produit de deux de ces matrices ?

4. Soient Γ_A et Γ_B deux matrices de l'ensemble.

(i) Calculez $\text{Trace}\Gamma_A$, $\text{Trace}(\Gamma_A)^2$, $\text{Trace}(\Gamma_A\Gamma_B)$.

(ii) Montrez que $\sum_{A=1}^? \lambda_A \Gamma_A = 0$ implique que tous les λ_A sont nuls.

5. En déduire que toute matrice carrée de rang 4 peut se décomposer de façon unique sur les Γ_A .

81 On s'interroge sur les théories de Dirac, $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$, éventuellement invariantes par rapport à la transformation interne $\psi(\underline{x}) \rightarrow \psi'(\underline{x}) = U\psi(\underline{x})$, où U est une matrice de rang 4.

1. A quelle condition les anti-commutateurs canoniques aux temps égaux gardent-ils les mêmes expressions ?

2. On pose $U = e^{i\Gamma\omega}$, où Γ est une matrice de rang 4 et ω un paramètre réel. Comment la condition précédente se traduit-elle sur Γ ?

3. Soit le "terme cinétique" : $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$.

(i) Que devient-il après une transformation infinitésimale $d\omega$?

(ii) Comment se traduit sur Γ la condition de stationnarité du terme cinétique par rapport à ω ? (Il n'est pas totalement inutile de se souvenir de l'identité $[AB, C] = A[B, C]_+ - [C, A]_+B$.)

(iii) Quelles sont les matrices Γ candidates ? (Il est tout aussi peu inutile de se souvenir des résultats de l'exercice **80**.)

4. Que devient le "terme de masse" $\bar{\psi}\psi$ après une transformation infinitésimale $d\omega$?

5. En déduire les types de symétries $e^{i\Gamma\omega}$ possibles, et les densités lagrangiennes correspondantes.

6. Donnez les expressions des courants et charges conservés correspondants.

82 Soit le champ de fermions libre

$$\psi(\underline{x}) = \sum_{\mathbf{p}r} \frac{1}{\sqrt{2\omega\mathcal{V}}} \{ b_{\mathbf{p}r} u_r(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\underline{x}} + d_{\mathbf{p}r}^+ v_r(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\underline{x}} \},$$

et le courant conservé $qj^\mu \stackrel{\text{df}}{=} q : \bar{\psi}\gamma^\mu\psi :$, avec $q \stackrel{\text{df}}{=} -|e|$.

1. Calculez le développement en modes de la charge Q conservée correspondante.

2. Quelle est la valeur de la charge d'un état à une particule...

— du type (b) ?

— du type (d) ?

- 83 Pour en finir avec l'hélicité des bispineurs de base... il importe de se souvenir qu'une notation du genre u signifie un tableau de 4 composantes d'un bispineur, que l'on devrait plutôt noter $\{u_\alpha\}$, ou encore :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

Dans une transformation spatio-temporelle passive — c'est-à-dire un changement d'axes d'espace et de temps —, ce sont les composantes qui changent (pas le bispineur lui-même, en tant qu'être géométrique) :

$$u_\alpha \rightarrow u'_\alpha = S_{\alpha\beta} u_\beta.$$

Si à tout vecteur \mathbf{p} donné est associé un bispineur, le vecteur \mathbf{p} lui-même est indifférent aux rotations en particulier, pour lesquelles on a donc :

$$u'_{\mathbf{p}\alpha} = S_{\alpha\beta} u_{\mathbf{p}\beta}.$$

Il est évidemment plus commode pour chaque utilisatrice de faire appel à son propre jeu de composantes pour le vecteur \mathbf{p} , auquel cas on a

$$\begin{cases} u'_\alpha(p^1, p^2, p^3) = S_{\alpha\beta} u_\beta(p^1, p^2, p^3), \\ p^i = R_{ij} p^j. \end{cases}$$

1. Juliette choisit son axe $\hat{\mathbf{3}}$ parallèle à \mathbf{p} et de même sens, donc $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{3}}$.
 - (i) Rappelez les expressions des composantes $u_{r\alpha}(0, 0, p)$ de ses quatre bispineurs de base.
 - (ii) Calculez la matrice $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ pour Juliette. Vérifiez que les $u_{r\alpha}(0, 0, p)$ en sont des vecteurs propres. Avec quelles valeurs propres ?
2. Roméo choisit son axe $\hat{\mathbf{3}}'$ parallèle à \mathbf{p} et de sens opposé. Pour lui : $\mathbf{p} = p'\hat{\mathbf{3}}'$.
 - (i) On peut considérer que l'on est passé du repère de Juliette à celui de Roméo par une rotation de π autour de l'axe $\hat{\mathbf{2}}$ (par exemple). Montrez que la matrice S correspondante vaut

$$S = \begin{pmatrix} e^{i\sigma_2 \frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\sigma_2 \frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}.$$

Calculez en explicitement les éléments. En déduire les composantes $u'_{r\alpha}(0, 0, p') = S_{\alpha\beta} u_{r\beta}(0, 0, p)$ des mêmes bispineurs u_r pour Roméo.

- (ii) Calculez la matrice $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ pour Roméo. Vérifiez que les bispineurs de Roméo, de composantes $u'_{r\alpha}(0, 0, p')$ ont la même hélicité que les bispineurs de Juliette correspondants (même r) — comme il se devait puisque les $\eta\sigma_i\chi$ sont composantes d'un vecteur, et donc $(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\chi}) \cdot \mathbf{p}$, ou $\bar{u}_r \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_r$, sont scalaires par rapport aux rotations.

- 84 Pour Laurent, on étudie la théorie de champ de bispineurs $\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi - a \bar{\psi} \psi$.

1. Quelles sont les dimensions du champ ψ et de la constante a ?
2. Ecrire...
 - (i) les équations du mouvement,
 - (ii) la relation de dispersion pour les modes plans,
 - (iii) l'expression correspondante de l'hamiltonien.
3. Que peut-on dire de cet hamiltonien lorsqu'on fait choix...
 - (i) de commutateurs canoniques aux temps égaux ?
 - (ii) d'anti-commutateurs canoniques etc. ?

- 85 Mêmes questions que l'exercice 84, pour $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - a)\psi + b\partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi$.

86 Spectres de l'hamiltonien libre et de l'hamiltonien en interaction (d'après T.D. LEE, page 67). Rappelons que pour un système évoluant à partir d'un "état initial" $U_0(t, 0)|i\rangle$ ($t \approx -\infty$) sous l'action d'un hamiltonien $H = H_0 + H_{\text{int.}}$, la probabilité d'obtenir l'"état final" $U_0(t, 0)|f\rangle$ est

$$\text{Pr}_{i \rightarrow f} = |\langle f|S|i\rangle|^2 = \left| \langle f| \lim_{t_{\pm} \rightarrow \pm\infty} S(t_+, t_-)|i\rangle \right|^2,$$

avec

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} S(t, t_0) = H_{\text{int.}}^{(I)}(t) S(t, t_0), \\ S(t_0, t_0) = 1. \end{cases}$$

L'existence de la limite précédente peut poser quelques problèmes, pas totalement indépendants du fait que la décomposition de H donné, en H_0 et $H_{\text{int.}}$ apparaît largement arbitraire.

1. Exemple : on considère l'hamiltonien $H = \omega a^+ a$, avec $[a, a^+] = 1$. Essayons la décomposition :

$$\begin{cases} H_0 \stackrel{\text{df}}{=} \omega_0 a^+ a, \\ H_{\text{int.}} \stackrel{\text{df}}{=} (\omega - \omega_0) a^+ a. \end{cases}$$

(i) Calculez $H_{\text{int.}}^{(I)}(t)$.

(ii) Calculez $S(t, t_0)$.

(iii) Calculez l'élément de matrice $\langle n|S(t_+, t_-)|n\rangle$, où $|n\rangle$ est un état propre de $a^+ a$ pour la valeur propre n .

(iv) A quelle condition cet élément de matrice admet-il une limite lorsque $t_{\pm} \rightarrow \pm\infty$?

2. On essaye maintenant différents moyens de tourner la difficulté précédente :

(i) On peut tout d'abord tenter de modifier l'équation différentielle caractérisant $S(t, t_0)$ dans les régions asymptotiques. Par exemple, on peut affecter une partie imaginaire à t , ou alors changer $H_{\text{int.}}^{(I)}(t)$ en le remplaçant par

a)

$$H_{\text{int.}}^{(I)}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} (\omega - \omega_0) a^+ a & \text{si } |t| \leq T, \\ (\omega - \omega_0 - i\varepsilon) a^+ a & \text{si } |t| > T. \end{cases}$$

— Calculez $S(t, t_0)$ pour : $t, t_0 \in [-T, T]$, puis $t < t_0 < -T$, et enfin $T < t_0 < t$.

— Calculez $\lim_{t_{\pm} \rightarrow \pm\infty} S(t_+, t_-)$.

— Cette limite est-elle unitaire ?

— Dépend-elle du paramètre artificiel supplémentaire T ?

b)

$$H_{\text{int.}}^{(I)}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} (\omega - \omega_0) a^+ a & \text{si } |t| \leq T, \\ 0 & \text{si } |t| > T. \end{cases}$$

Mêmes questions.

(ii) Sans changer l'équation différentielle (c'est-à-dire $H_{\text{int.}}$), on décide de restreindre le choix à des H_0 qui ont le même spectre que H . Quelles valeurs de ω_0 , $H_{\text{int.}}$ et S ce choix implique-t-il ?

3. On essaye le même truc dans le cas d'un champ scalaire en auto-interaction

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - m_0^2\varphi^2) - \frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4,$$

en prenant pour hamiltonien

$$H \stackrel{\text{df}}{=} \int d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2}(\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m_0^2\varphi^2) + \frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4 \right\} - E_{\text{fond.}},$$

où la constante $E_{\text{fond.}}$ est choisie en sorte que

$$H|_{\text{fondamental de } H} = 0.$$

On suppose (c'est absolument nécessaire, même si c'est difficile à démontrer) que le spectre de H est constitué d'états qui, asymptotiquement, auront l'air de particules libres de masse m (c'est la masse observée, ou "physique"). Les valeurs du spectre sont donc de la forme $E = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} n_{\mathbf{k}}$.
On choisit à présent

$$H_0 \stackrel{\text{df}}{=} \int d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} (\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m'^2\varphi^2) + \frac{\lambda_0}{4!} \varphi^4 \right\} - E_0 \text{ fond.},$$

avec E_0 fond. telle que

$$H_0 | \text{fondamental de } H_0 \rangle = 0.$$

(i) Quel est le spectre de H_0 ?

(ii) Montrez qu'il est possible de choisir le paramètre m' en sorte que H_0 et H aient même spectre.

87 Produit chronologique et produit ordinaire.

1. Montrez que pour un opérateur commutant à tous instants avec lui même,

$$[H(t), H(t')] = 0, \quad \forall t, t',$$

on a :

$$\top e^{-i \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1)} = e^{-i \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1)}.$$

2. Trouvez des exemples de tels hamiltoniens.

88 Montrez que l'on a

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H(t_1)H(t_2)H(t_3) = \frac{1}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \top \{ H(t_1)H(t_2)H(t_3) \}.$$

89 Soit le champ quadri-vectorel de composantes $A^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ pour Ada.

1. Quelles sont les expressions des composantes $A'^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ de ce même champ, pour Van qui utilise des coordonnées reliées à celles qu'utilise Ada par la relation : $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$?

2. Pour Ada, le champ A^μ satisfait la condition de Coulomb. Qu'en est-il alors de la quantité $\partial'_i A'^i$ pour Van ?

3. Van décide d'effectuer une transformation de jauge sur son champ,

$$A'^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \rightarrow A''^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

de façon à avoir $\partial'_i A''^i = 0$.

(i) Déterminez les A''^μ en fonction des A^ν .

(ii) Est-ce une transformation de Lorentz ?

90 Equation de Dirac et couplage minimal.

1. Soit un opérateur quadrivectorel V_μ . Calculer $\mathcal{V}\mathcal{V}$ en fonction des V_μ et des $\sigma^{\mu\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

2. Application au calcul de $(i\partial - q\mathcal{A})^2$, où \mathcal{A} est un quadripotential.

3. Soit l'équation $(i\partial - m - q\mathcal{A})\psi = 0$.

(i) En déduire, par action de l'opérateur $i\partial + m - q\mathcal{A}$, une équation pour ψ en termes des $\sigma^{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu}$.

(ii) Exprimer ces termes en fonction de $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{df}}{=} \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$, des matrices $\boldsymbol{\sigma}$ de Pauli et des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} associés à \mathcal{A} .

4. Application au cas $A^0 = 0$, $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{r}$, avec \mathbf{B}_0 uniforme et constant :

(i) Calculer \mathbf{E} , \mathbf{B} , $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

(ii) En déduire l'équation à laquelle doit satisfaire ψ , en termes de \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{L} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{r} \wedge \frac{1}{i} \nabla$ et $\mathbf{S} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$.

91 Vérifiez que les définitions du produit chronologique \top , du produit normal : ... $:$, et de la contraction $\underline{\quad}$, impliquent...

1. ... pour un champ scalaire :

$$\underline{\varphi(\underline{x}_1)\varphi(\underline{x}_2)} = \begin{cases} [\varphi^{(+)}(\underline{x}_1), \varphi^{(-)}(\underline{x}_2)] & \text{si } t_1 > t_2, \\ [\varphi^{(+)}(\underline{x}_2), \varphi^{(-)}(\underline{x}_1)] & \text{si } t_2 > t_1; \end{cases}$$

2. ... et pour les composantes d'un champ bispinoriel :

$$\underline{\psi_\alpha(\underline{x}_1)\bar{\psi}_\beta(\underline{x}_2)} = \begin{cases} [\psi_\alpha^{(+)}(\underline{x}_1), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(\underline{x}_2)]_+ & \text{si } t_1 > t_2, \\ -[\psi_\alpha^{(-)}(\underline{x}_1), \bar{\psi}_\beta^{(+)}(\underline{x}_2)]_+ & \text{si } t_2 > t_1. \end{cases}$$

92 Vous vous interrogez fort légitimement sur l'exigence de microcausalité (la nullité du *commutateur* de deux grandeurs physiques associées à des événements séparés par un intervalle du genre espace) dans la théorie du champ de Dirac (dont la structure est déterminée par des *anticommutateurs*). A ce propos, il importe de remarquer que les grandeurs physiques locales d'un champ de Dirac sont — invariance oblige — toujours tensorielles (scalaires, "vectorielles", *etc.*), et donc des formes bilinéaires du champ, du type

$$\bar{\psi}_\alpha(\underline{x})\psi_\beta(\underline{x}) \times \left(\begin{smallmatrix} \text{qq. chose de} \\ \text{numérique} \end{smallmatrix} \right)_{\alpha\beta}.$$

Il n'y a plus, ensuite, qu'à se laisser aller...

1. Montrez que

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}_\alpha(\underline{x})\psi_\beta(\underline{x}), \bar{\psi}_\rho(\underline{x}')\psi_\sigma(\underline{x}')] &= \bar{\psi}_\rho(\underline{x}') \left\{ \bar{\psi}_\alpha(\underline{x}) [\psi_\beta(\underline{x}), \psi_\sigma(\underline{x}')]_+ - [\psi_\sigma(\underline{x}'), \bar{\psi}_\alpha(\underline{x})]_+ \psi_\beta(\underline{x}) \right\} \\ &\quad + \left\{ \bar{\psi}_\alpha(\underline{x}) [\psi_\beta(\underline{x}), \bar{\psi}_\rho(\underline{x}')]_+ - [\bar{\psi}_\rho(\underline{x}'), \bar{\psi}_\alpha(\underline{x})]_+ \psi_\beta(\underline{x}) \right\} \psi_\sigma(\underline{x}'). \end{aligned}$$

2. Au moyen du développement en modes...

(i) Montrez que $[\psi_\alpha(\underline{x}), \psi_\beta(\underline{x}')]_+ = 0$.

(ii) Montrez que $[\psi_\alpha(\underline{x}), \bar{\psi}_\beta(\underline{x}')]_+ = i\Sigma_{\alpha\beta}(\underline{x} - \underline{x}')$, avec $\Sigma(\underline{x}) \stackrel{\text{df}}{=} (i\cancel{\partial} - m)\Delta(\underline{x})$, où

$$\Delta(\underline{x}) = -i \int \frac{d^4\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-i\mathbf{k}\cdot\underline{x}} \varepsilon(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}^2 - m^2),$$

fonction qui a été introduite lors de l'étude du commutateur du champ scalaire à des temps quelconques.

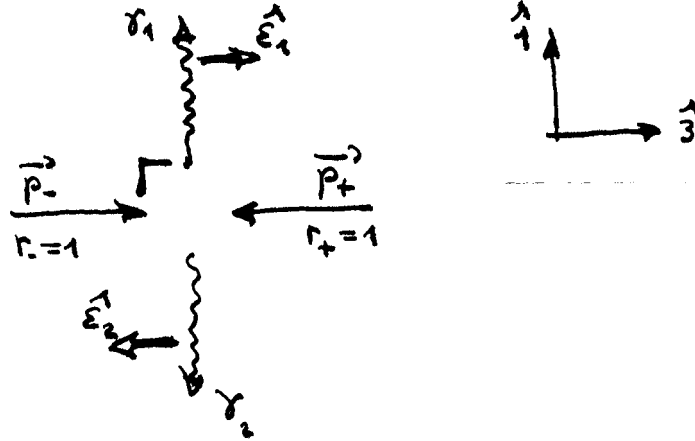
3. En déduire que $[\bar{\psi}_\alpha(\underline{x})\psi_\beta(\underline{x}), \bar{\psi}_\rho(\underline{x}')\psi_\sigma(\underline{x}')]_+$ est nul lorsque l'intervalle $\underline{x} - \underline{x}'$ est du genre espace.

93 A l'aide du développement en modes de l'opérateur de champ de Dirac libre,

1. ... calculez $\langle 0 | \bar{\psi}(\underline{x}) \gamma^\mu \psi(\underline{x}) | 0 \rangle$,
2. ... et $\langle 0 | : \bar{\psi}(\underline{x}) \gamma^\mu \psi(\underline{x}) : | 0 \rangle$.

94 On étudie la collision d'un électron et d'un positron dans le repère dit du "centre de masse" (cas d'un collisionneur). Electron et positron sont respectivement dans des états d'hélicité +1 et -1. On désire calculer la section différentielle d'émission de deux photons de polarisations (transverses, cela devrait aller sans dire) $\hat{\epsilon}_1$ et $\hat{\epsilon}_2$, le photon 1 étant émis à 90° , dans l'angle solide $d^2\hat{\mathbf{k}}_1$.

1. Le processus qui nous intéresse et le choix d'axes qu'il est possible de faire (si l'on ne cherche pas à compliquer les choses) sont les suivants,



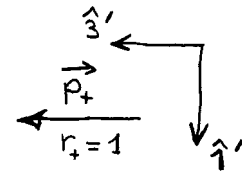
et on note

$$\{p_-^\mu\} = \begin{cases} \omega \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{p_-^2 + m^2}, \\ 0, \\ 0, \\ p_- \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{p_-^2}. \end{cases}$$

- (i) Donnez les valeurs de toutes les composantes $p_+^\mu, k_1^\mu, k_2^\mu, \epsilon_1^\mu, \epsilon_{1\mu}, \epsilon_2^\mu, \epsilon_{2\mu}$.
- (ii) Calculez les composantes k^μ et k_μ , et le carré \underline{k}^2 du moment de transfert, pour chacune des deux définitions possibles : $\underline{k} \stackrel{\text{df}}{=} \underline{p}_- - \underline{k}_1$ et $\underline{k} \stackrel{\text{df}}{=} \underline{p}_- - \underline{k}_2$.

2. Au moyen des composantes de bispineurs de base trouvées en cours et en représentation de Dirac :

- (i) Quelles sont les valeurs des composantes $u_{1\alpha}$ du bispineur associé à l'électron incident ?
- (ii) Quelles sont les valeurs des composantes de l'impulsion \mathbf{p}_+ dans le repère $\{\hat{1}', \hat{2}', \hat{3}'\}$ ci-contre ?
- (iii) Quelles sont les valeurs des composantes $v'_{1\alpha}$ du bispineur associé au positron incident ?
- (iv) En déduire les composantes $v_{1\alpha}$ de ce même spineur dans le repère $\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ (cf. exercice 83).



3. Montrez que l'élément de matrice de Feynman $-i\mathcal{M}_{\text{fi}}$ correspondant au premier ordre de perturbation non nul pour ce processus, vaut $ie^2 4mp/\omega^2$ (sauf erreur, aussi probable qu'involontaire, de ma part).

4. Montrez que la section efficace différentielle d'émission d'un photon dans $(\hat{\mathbf{k}}_1, d^2\hat{\mathbf{k}}_1)$ vaut, en fonction de $\mathcal{M}_{\text{fi}}, d^2\sigma = (1/2^4(4\pi)^2)(1/\omega p)|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 d^2\hat{\mathbf{k}}_1$.

5. En déduire que cette section efficace différentielle vaut, finalement, $(e^2/4\pi)^2(m^2 p/\omega^5)d^2\hat{\mathbf{k}}_1$.

95 Soit la théorie $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$.

- 1. Sans calcul...
 - (i) Rappelez celles des règles de Feynman de cette théorie que vous devez déjà connaître.
 - (ii) Dessinez le type de vertex auquel il faut s'attendre dans ladite théorie.
- 2. Calculez le facteur associé au vertex de cette théorie.
- 3. Mêmes questions pour la théorie $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2) - \frac{\mu}{3!}\varphi^3 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$.